DODN Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu

Powiatowy Ośrodek Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej i Doradztwa Metodycznego w Oławie

PCDN I PPP W GÓRZE

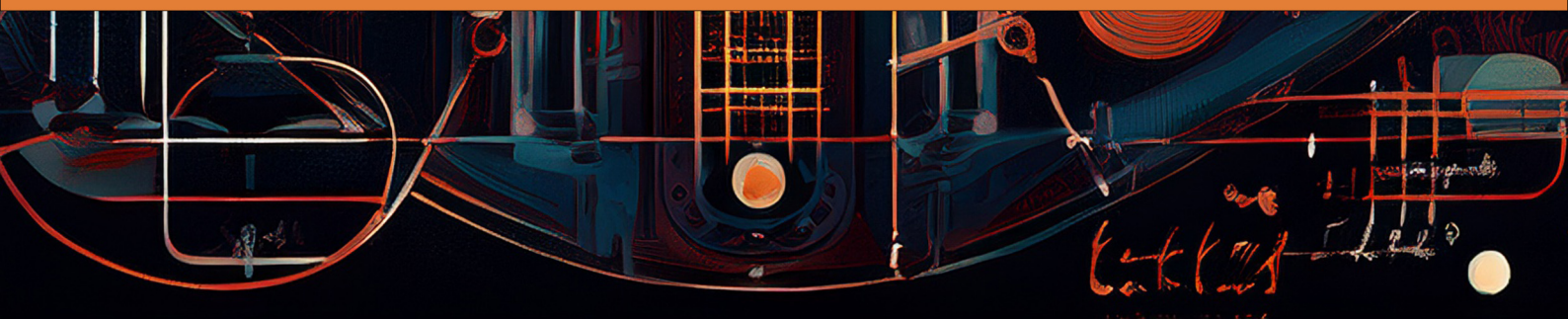
PCEiKK Bolesławiec

POPPPiDM Powiatowy Ośrodek Poradnictwa Psychologiczno-Pedagogicznego i Doradztwa Metodycznego w Polkowicach



Po matematyczne sukcesy

Inspiracje i wsparcie dla nauczycieli



Po matematyczne sukcesy

Inspiracje i wsparcie dla nauczycieli

Wrocław 2025

Strona redakcyjna

Redakcja:

Małgorzata Bieńkowska, Sabina Czajkowska-Prokop

Zespół Autorek i Autorów:

Bernard Bazylewicz (PCDNiPP-P w Górze), Małgorzata Bieńkowska (DODN we Wrocławiu), Agnieszka Czerniawska (POPPPiDM w Polkowicach), Aneta Hanusiak, Paweł Kwasik, Agnieszka Niedźwiedzka (SP nr 1 im. Bolesława Prusa w Górze), Agnieszka Ogiegło (DODN we Wrocławiu), Henryk Spustek (DODN we Wrocławiu), Ewa Stelczyk (POPPPiDM w Oławie), Maria Subik (PCEiKK w Bolesławcu)

Recenzja merytoryczna:

dr hab. Henryk Spustek (artykuły 1 – 7), Jerzy Janowicz (artykuł 8)

Korekta językowa:

Honorata Uchwał-Kalka

Skład:

Noemi Nikończuk-Kowalczyk

Wydawca:

Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu, 53-025 Wrocław, ul. Trzebnicka 42/44

Licencja:

CC BY-NC-SA 4.0 - Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Na tych samych warunkach 4.0 Polska.

Egzemplarz bezpłatny

Wrocław, 2025

Spis treści

Przedmowa 5

1. Droga do sukcesu – skuteczne strategie przygotowania uczniów do egzaminu z matematyki (Małgorzata Bieńkowska) 7

2. Różnorodne formy pracy podczas zajęć szansą na rozwój osobisty ucznia (Ewa Stelczyk) 19

3. Błąd kluczem do nauki i rozwoju (Agnieszka Czerniawska) 25

4. Strategie rozwiązywania zadań otwartych z matematyki (Bernard Bazylewicz) 29

5. Narzędziownik nauczyciela matematyki w klasach IV – VIII (Agnieszka Ogiegło) 35

6. Oswoić matematykę – projekt edukacyjny o charakterze metodycznym (Aneta Hanusiak, Paweł Kwasik, Agnieszka Niedźwiedzka) 45

7. Plan obozu harcerskiego – scenariusz lekcji (Maria Subik) 49

8. Matematyka – radość tworzenia i odkrywania. Kilka raczej ciekawych przykładów (Henryk Spustek) 55

Bibliografia 79

Przedmowa

Szanowni Państwo,

oddajemy w Państwa ręce publikację pt. „Po matematyczne sukcesy. Inspiracje i wsparcie dla nauczycieli", która powstała w wyniku wspólnej inicjatywy dolnośląskich doradców metodycznych i nauczycieli-konsultantów ds. matematyki, którzy postanowili połączyć swoje doświadczenie i wiedzę, aby wyjść naprzeciw potrzebom środowiska. Wspólna praca i wymiana doświadczeń pozwoliła stworzyć materiał, który ma na celu nie tylko wsparcie merytoryczne nauczycielek i nauczycieli matematyki, ale także inspirowanie do wdrażania nowych, efektywnych metod pracy w swojej codziennej praktyce edukacyjnej.

Autorki i autorzy niniejszej publikacji skupili się na praktycznej stronie nauczania matematyki. Omówione przykłady, sprawdzone praktycznie, zostały tu zamieszczone z zachowaniem równowagi pomiędzy problematyką stricte matematyczną a jej zastosowaniami w innych dziedzinach (np. w fizyce). W tym miejscu należy się Czytelnikom i Czytelniczkom pewne wyjaśnienie. Otóż wszyscy zapewne pamiętamy przykładowe zadanie matematyczne następującego typu: *Jan, wiosłując na stojącej wodzie, może płynąć swoją łodzią z prędkością 5 km na godzinę. Popłynął 8 km w dół rzeki, a następnie powrócił do miejsca, z którego wypłynął. Jak długo trwała jego przejażdżka łodzią, jeżeli prędkość prądu rzeki wynosiła 5 km na godzinę?* Przykład ten, przełożony na język matematyki, dla większości uczniów pozostanie zupełnie nieinteresującym abstraktem. Jednakże, przy odrobinie wyobraźni można go przekształcić w zdarzenie bliższe rzeczywistości. Mogłoby to wyglądać np. tak: *Jest ranek i Jan zamierza popołudniu odbyć przejażdżkę po rzece. Może on wyruszyć o godzinie 13.00, ale musi być z powrotem o godzinie 18.00. Do miejsca, do którego chciałby dotrzeć, jest 8 km. Czy ma dość czasu na taką wycieczkę?* Trzeba przyznać, że teraz treść zadania stała się bliższa rzeczywistości[1]. Jeśli chcemy, aby zadania matematyczne pobudzały ciekawość uczniów i uczennic, musimy zadbać o ich urealnienie, zgodnie z poglądem Hugo Steinhausa, który uważał, że przedmiotem matematyki jest rzeczywistość i że matematyka jest uniwersalna, nie ma rzeczy, która by była dla niej obca[2]. Podejściem tym kierowali się autorzy i autorki niniejszej publikacji.

Przedstawiona publikacja zawiera osiem powiązanych ze sobą artykułów, których myślą przewodnią jest zwiększenie efektywności procesu nauczania matematyki w celu poprawy wyników z matematyki, uzyskiwanych w ostatnich latach w ramach egzaminu ósmoklasisty oraz egzaminu maturalnego.

Treść wszystkich artykułów oscyluje wokół problematyki efektywnego nauczania matematyki w szkole, zarówno na poziomie podstawowym, jak i ponadpodstawowym.

Wiemy, że na efektywność procesu nauczania matematyki w szkole ma wpływ wiele czynników, lecz najistotniejszym czynnikiem jawi się rozbudzenie chęci do poznawania świata matematyki poprzez kształtowanie umiejętności systematycznego zdobywania wiedzy, co staje się szczególnie istotne na początkowym poziomie nauczania. Zaniedbania w tym zakresie skutkują zniechęceniem i w efekcie uzyskaniem niskich wyników egzaminu ósmoklasisty z matematyki oraz odrzuceniem w przyszłości wszystkiego, co wiąże się nawet z najprostszym opisem matematycznym.

1 Przytoczony przykład pochodzi z: Robert Hooke, Douglas Shaffer, Modele matematyczne a rzeczywistość, Wyd. PWN, Warszawa 1969, s. 17.

2 Aforyzm Hugo Steinhausa, patrz: Hugo Steinhaus, 100 zadań, Wyd. PHU, Warszawa 1993.

Artykuł Ewy Strzelczyk, *Różnorodne formy pracy podczas zajęć szansą na rozwój osobisty ucznia*, zawiera wskazówki, jak łączyć nauczanie matematyki w szkole podstawowej z grą i zabawą. Sprawdzona metoda gier dydaktycznych daje pożądane wyniki, przekładające się na jakość kształcenia przy jednoczesnej zawartości pierwiastka zabawy. Autorka wskazuje także na korzyści płynące z korelacji międzyprzedmiotowej (łączenia matematyki z innymi przedmiotami). Połączenia takie wymagają współpracy pomiędzy nauczycielami i nauczycielkami. Długofalowe korzyści płynące z tego typu współpracy z pewnością rekompensują wysiłek włożony w przygotowanie procesu dydaktycznego.

Artykuł: *Oswoić matematykę – projekt edukacyjny o charakterze metodycznym,* autorstwa zespołu w składzie: Aneta Hanusiak, Paweł Kwasik, Agnieszka Niedźwiedzka, traktuje o problematyce przełamania wewnętrznych oporów, wyrównywaniu braków edukacyjnych, doskonaleniu zdolności rachunkowych oraz pobudzaniu kreatywności w rozwiązywaniu problemów matematycznych u uczniów szkoły podstawowej. Projekt adresowany jest do uczniów i uczennic klas ósmych szkoły podstawowej. Materiał tu zawarty jest pewną propozycją wspomagającą proces nauczania matematyki i może być z powodzeniem wykorzystany w każdej szkole podstawowej.

Zniechęcenie do matematyki bierze swój początek w niewłaściwej interpretacji popełnianych błędów na wczesnym etapie nauki. Artykuł Agnieszki Czerniawskiej, *Błąd kluczem do nauki i rozwoju*, wychodzi naprzeciw tej problematyce i ukazuje pozytywne oblicze błędu. Autorka zwraca uwagę na znaczenie błędów popełnianych przez uczniów i uczennice w trakcie rozwiązywania zadań matematycznych oraz związaną z tym reakcję nauczycielki czy nauczyciela. Błąd jest przeważnie utożsamiany ze zjawiskiem negatywnym. Stąd też opatrzony jest najczęściej przymiotnikiem „głupi". Tymczasem znaczenie popełnianych błędów jest znacznie szersze, w tym również pozytywne. Błędy popełniamy wszyscy, natomiast nie wszyscy potrafimy je identyfikować i naprawiać, dlatego tak ważne jest kształtowanie umiejętności pozytywnego wykorzystania błędu w procesie zdobywania wiedzy. W artykule znajdujemy protokół z przykładowego dialogu nauczycielki z uczennicą, ilustrujący problematykę błędu.

Niezmiernie ważne jest podejście nauczycieli i nauczycielek oraz uczniów i uczennic do istoty nauczania matematyki. Sama sucha argumentacja dorosłych o potrzebie uczenia się matematyki nie jest wystarczająco przekonywująca z punktu widzenia dzieci i młodzieży. Na nauczanie matematyki należy spojrzeć szerzej, o czym traktuje artykuł autorstwa Małgorzaty Bieńkowskiej pt. *Droga do sukcesu – skuteczne strategie przygotowania uczniów do egzaminu z matematyki*. Autorka omawia poszczególne czynniki wpływające na efektywność procesu przygotowania uczniów i uczennic do egzaminu z matematyki. Na sukces odniesiony podczas egzaminu składa się szereg czynników, począwszy od zrozumienia wymagań egzaminacyjnych, a skończywszy na radzeniu sobie ze stresem. Jednocześnie trzeba pamiętać o tym, ze nic tak nie zachęca do zgłębiania wiedzy, jak związek teorii z doświadczeniem.

Zastosowania praktyczne stanowią istotny czynnik synergii w procesie nauczania. Dzieje się tak nie tylko w przypadku matematyki. Dzięki temu można mówić o interdyscyplinarności w metodach nauczania. *Plan obozu harcerskiego – scenariusz lekcji*, artykuł Marii Subik, jest dobrym przykładem praktycznego zastosowania podejścia interdyscyplinarnego w nauczaniu matematyki. Lekcja została zaprojektowana w taki sposób, aby przy jednoczesnym pobudzeniu ciekawości uczniów i uczennic, wyrobić u nich umiejętność praktycznego przeniesienia obliczeń matematycznych na efekt graficznej wizualizacji obozu harcerskiego. Uczniowie i uczennice zauważają związek obliczeń matematycznych z praktyką, przetwarzają na język matematyki informacje zawarte w tekście.

Artykuł Agnieszki Ogiegło, *Narzędziownik nauczyciela matematyki w klasie IV – VIII*, jest przewodnikiem po narzędziach TIK (Technologie Informacyjno-Komunikacyjne), wspomagających pra-

cę nauczycielek i nauczycieli matematyki. Narzędzia TIK są i pozostaną obecne w rzeczywistości dydaktycznej, nabierając coraz większego znaczenia, niezależnie od nieuchronnych zagrożeń, jakie niosą ze sobą. Pamiętając o potencjalnych zagrożeniach, dobrze jest wiedzieć o możliwościach narzędziownika dedykowanego nauczycielkom i nauczycielom matematyki, zawierającego przydatne i proste w codziennym zastosowaniu aplikacje komputerowe. Technologie informacyjne w zasadniczy sposób wspierają rozwój kompetencji matematycznych uczniów i uczennic, zwiększając w ten sposób efektywność nauczania matematyki.

Strategie rozwiązywania otwartych zadań z matematyki to artykuł Bernarda Bazylewicza. Autor skupia swoją uwagę na przygotowaniu uczniów i uczennic do egzaminu ósmoklasisty oraz na trudnościach, jakie sprawia im rozwiązywanie zadań otwartych z matematyki. W artykule zostały omówione strategie rozwiązywania zadań otwartych na wybranych przykładach praktycznych. Artykuł zawiera cenne uwagi, przydatne podczas rozwiązywania zadań matematycznych. Zamieszczone przykłady mają również podłoże praktyczne.

Niniejszą publikację zamyka artykuł Henryka Spustka, *Matematyka – radość tworzenia i odkrywania*. Kilka raczej ciekawych przykładów. Istotą problemu poruszanego w artykule jest pokazanie matematyki jako przedmiotu realizowanego w szkole w dwóch aspektach: utylitarnym – wskazującym na bardzo szerokie zastosowania narzędzi matematycznych, oraz inspirującym – wzbudzającym dążenie do zaspokojenia potrzeb intelektualnych: ciekawości, odkrywczości, umiejętności sprawnego rozwiązywania problemów. W artykule zamieszczono dziesięć przykładów, które zostały całkowicie rozwiązane. Dwa przykłady dotyczą bezpośrednio problemów praktycznych. W czterech przykładach pokazano, jak w niebanalny sposób można wykorzystać umiejętności matematyczne do sprawnego rozwiązywania problemów z zakresu fizyki. Sześć przykładów stanowią rozważania czysto matematyczne. Część z nich jednak jest następnie wykorzystywana do rozwiązania praktycznych problemów z zakresu fizyki. Stopień trudności prezentowanych przykładów jest różnorodny – od poziomu szkoły podstawowej, przez zagadnienia typowe dla szkoły ponadpodstawowej, aż do zagadnień wykraczających poza podstawę programową szkoły ponadpodstawowej, ale będących w zasięgu percepcji uzdolnionych matematycznie uczniów i uczennic na tym poziomie kształcenia. Rozwiązania problemów są opisane przystępnym językiem i opatrzone rysunkami, pozwalającymi w pełni zrozumieć prezentowane rozumowanie.

Serdecznie Państwa zachęcam do szczegółowego zapoznania się z treścią poszczególnych artykułów, mając jednocześnie nadzieję, że przedstawiony tu materiał zainspiruje Państwa do wprowadzania nowych rozwiązań metodycznych w swojej codziennej pracy.

dr Katarzyna Pawlak-Weiss

Dyrektor
Dolnośląskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu

Autorka:
Małgorzata Bieńkowska, nauczyciel-konsultant
Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu

Droga do sukcesu – skuteczne strategie przygotowania uczniów do egzaminu z matematyki

Egzamin z matematyki to dla wielu uczniów jedno z największych wyzwań edukacyjnych. Jednak warto pamiętać, że matematyka to nie tylko przedmiot szkolny, ale umiejętność, którą wykorzystujemy na co dzień. Matematyczne myślenie towarzyszy nam w wielu aspektach życia – od obliczeń związanych z budżetem domowym, poprzez pomiar odległości w podróży, aż po logiczne podejmowanie decyzji. Dlatego nauka matematyki nie powinna być traktowana tylko jako przygotowanie do egzaminu, ale także jako inwestycja w rozwój umiejętności, które mają praktyczne zastosowanie w codziennych sytuacjach.

Przy odpowiednim podejściu, systematyczności i zastosowaniu sprawdzonych metod nauki, przygotowanie do egzaminu może stać się bardziej efektywne i mniej stresujące. Matematyka, choć bywa trudna, jest przedmiotem, który wymaga nie tylko znajomości teorii, ale i umiejętności rozwiązywania różnorodnych problemów i zastosowania wiedzy praktycznej wynikającej z codziennych wyzwań.

Aby przygotowanie do egzaminu z matematyki było skuteczne, należy zwrócić uwagę na kilka kluczowych aspektów. Po pierwsze, ważne jest zrozumienie wymagań egzaminacyjnych i koncentracja na najistotniejszych zagadnieniach. Planowanie nauki ma tu ogromne znaczenie – rozłożenie materiału na mniejsze części i wyznaczenie regularnych celów pozwala uniknąć presji i efektywnie przyswajać wiedzę. Skuteczne metody nauki, takie jak rozwiązywanie zadań, praca z arkuszami egzaminacyjnymi z lat ubiegłych, jak również stosowanie różnych narzędzi, pomagają w utrwaleniu materiału i zwiększają pewność siebie ucznia. Ważne jest także, aby uczniowie pamiętali o systematyczności, która pozwala na efektywne przyswajanie wiedzy. Motywacja, zarówno ta wewnętrzna, jak i zewnętrzna, stanowi fundament skutecznego przygotowania do egzaminu. Istotną rolę odgrywają również nauczyciele, którzy wspierają uczniów w trakcie nauki. Na koniec, nie zapominajmy o aspekcie psychologicznym – stres przed egzaminem jest naturalnym zjawiskiem, ale odpowiednie przygotowanie mentalne może pomóc uczniom w lepszym radzeniu sobie z nim w dniu egzaminu.

Przejdźmy teraz do omówienia każdego z tych kluczowych elementów, które mają wpływ na efektywne przygotowanie do egzaminu.

Zrozumienie wymagań egzaminu

Podczas egzaminacyjnych przygotowań niezwykle ważne jest uporządkowanie wiedzy na temat wymagań egzaminacyjnych. Pomogą nam w tym materiały zamieszczone na stronie Centralnej Komisji Egzaminacyjnej[1], na której znajdziemy podstawę programową kształcenia ogólnego, informatory, archiwalne arkusze egzaminacyjne oraz inne materiały dodatkowe.

Konieczna jest analiza struktury egzaminu – wyjaśnienie, jak wygląda egzamin z matematyki, z jakich części się składa oraz jakie wymagania są zawarte w poszczególnych częściach.

Informatory CKE dotyczące egzaminów zewnętrznych, tj. egzaminu ósmoklasisty i egzaminu maturalnego, zawierają informacje o zadaniach egzaminacyjnych i sposobie ich rozwiązywania. Przykła-

[1] Centralna Komisja Egzaminacyjna – Egzamin ósmoklasisty, https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/ [dostęp: 15.01.2025]

dowe zadania egzaminacyjne wraz z rozwiązaniami opatrzone są opisami wymagań ogólnych i wymagań szczegółowych zawartych w podstawie programowej kształcenia ogólnego z matematyki. Podana jest również informacja na temat zasad oceniania.

Analiza zadań zamkniętych umożliwia uczniom wypracowanie odpowiednich strategii ułatwiających ich rozwiązywanie. Warto dodać, że rozwiązując zadania zamknięte, najbardziej przydatne okazują się:

- strategia eliminacji, która polega na tym, że odrzucamy odpowiedzi, które nie spełniają warunków zadania, zaczynając od najbardziej odbiegających od tych warunków,
- strategia sprawdzania warunków, czyli sprawdzamy warunki zadania dla kolejnych odpowiedzi podanych w podpunktach.

Podczas nauki matematyki niezwykle ważne jest wskazywanie uczniom na różnorodność podejść do poszczególnych zadań – od podstawowych po bardziej złożone – oraz organizacja swojej pracy. Takie podejście pozwala na rozwijanie umiejętności myślenia analitycznego i myślenia krytycznego, a ponadto uczy tworzenia strategii rozwiązywania problemów.

Przegląd zadań zawartych w Informatorze[2] oraz zadań zamieszczonych w archiwalnych arkuszach egzaminacyjnych ułatwia omówienie typowych zagadnień matematycznych oraz zauważenie najczęściej pojawiających się tematów.

Zachęcam także do heurystycznego podejścia w uczeniu matematyki. Heurystyka stara się zrozumieć zachowanie człowieka stojącego wobec jakiegoś zadania, w tym przypadku jest to oczywiście zrozumienie procesu rozwiązywania zadań, w szczególności operacji myślowych oraz ich wpływu na nauczanie. George Pólya – amerykański matematyk i dydaktyk matematyki, twórca nowoczesnej heurystyki – stwierdza, że: „Zadanie matematyczne może być taką rozrywką jak krzyżówka i może smakować jak ciastko z malinami”(Pólya, 2012, s. 5-6). Trzeba tylko przekonać o tym swoich uczniów! Podstawą heurystyki w dydaktyce matematyki jest doświadczenie w rozwiazywaniu zadań i obserwowaniu innych ludzi rozwiązujących zadania oraz wyszukiwanie wspólnych cech sposobów traktowania zadań, niezależnie od rodzaju i tematyki. Dzięki wnioskom z dokonywanych wieloletnich obserwacji nauczycielowi łatwiej jest znaleźć środki wspierające i motywujące uczniów.

Systematyczne uczenie się i planowanie nauki

Umiejętność uczenia się danego przedmiotu to jedna z podstawowych umiejętności, z którą uczeń powinien ukończyć szkołę. Jest to również ważny obowiązek nauczyciela. Tworzenie planów nauki, strategie uczenia się uwzględniające styl poznawczy ucznia oraz ułatwiające zapamiętywanie i zrozumienie materiału to elementy procesu dydaktycznego.

W przygotowaniach egzaminacyjnych nieodzowna jest pomoc nauczyciela w opracowaniu indywidualnych planów nauki, które uwzględniają czas pozostały do egzaminu, priorytety w nauce i konkretne cele. Podział materiału na mniejsze części ułatwia ich skuteczne przyswajanie, np. nauka konkretnego zagadnienia w ciągu tygodnia, a następnie powtórzenie. Ważna jest także regularność nauki. Indywidualny plan nauki powinien być skorelowany z powtórkami w klasie i ułatwiać uczniowi samodzielną naukę.

Praktyka jest kluczem do zapamiętania i zrozumienia pojęć matematycznych. Rozwiązywanie zadań o różnym stopniu trudności pomaga utrwalić wiedzę i identyfikować luki w zrozumieniu materiału.

Korzystanie z arkuszy egzaminacyjnych z lat ubiegłych lub próbnych testów to doskonały sposób na poznanie struktury egzaminu i typowych zadań.

[2] Centralna Komisja Egzaminacyjna, *Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2024/2025*, http://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_OSMOKLASISTY/Informatory/2024/standard/Informator_E8_matematyka_2025_P1.pdf [dostęp: 15.01.2025]

Analiza własnych błędów pomaga w nauce. Ważne jest, by po rozwiązaniu zadania dokładnie przeanalizować, co poszło nie tak i jakie zasady należy poprawić.

W powtórkach może pomóc Zintegrowana Platforma Edukacyjna, oferująca bogate zasoby edukacyjne i dająca ogromne możliwości tworzenia nie tylko materiałów, ale też zorganizowania spersonalizowanych ścieżek nauki czy profesjonalnych kursów przygotowawczych do egzaminów, a nawet forum dyskusyjnego.

Nauczyciel może wspomagać uczniów poprzez przedstawianie im stron internetowych i aplikacji, które wspierają naukę matematyki – matematyczne gry dydaktyczne, aplety, symulatory, materiały wideo.

Techniki pamięciowe i skojarzeniowe

Wykorzystanie technik pamięciowych ułatwi uczniom zapamiętanie wzorów, twierdzeń czy algorytmów. Mnemotechniki takie jak: akronimy, rymowanki, obrazy mentalne czy skojarzenia warto stosować nie tylko podczas przygotowania do egzaminów. Uczniowie lubią je jako przerywniki w czasie lekcji, podobnie jak stosowanie map myśli jako narzędzi do organizowania wiedzy i łączenia różnych pojęć matematycznych. Budowanie połączeń między zagadnieniami oraz odniesienie ich do życia codziennego i zastosowania wiedzy w praktyce jest niezwykle ważne w procesie edukacyjnym. Techniki skojarzeniowe wspierają też kształtowanie myślenia krytycznego.

Motywacja i radzenie sobie z trudnościami

Wzmacnianie pozytywnego podejścia do nauki matematyki, uczenie jak pokonywać trudności, jak sobie radzić z lękiem przed egzaminem i utrzymaniem motywacji, wesprą techniki motywacyjne. Nauczyciel odgrywa kluczową rolę w budowaniu pewności siebie u uczniów poprzez zachęcanie ich do wiary w swoje umiejętności, pokazanie im, że matematyka to umiejętność, którą można rozwijać przez regularne ćwiczenia i zaangażowanie.

Niezwykle istotna jest umiejętność zarządzania stresem. Pomocne w redukcji stresu związanego z nauką i egzaminem mogą się okazać techniki relaksacyjne np. głębokie oddychanie czy medytacja.

Przeprowadzanie próbnych egzaminów i analiza błędów

Regularne symulowanie warunków egzaminu nie tylko wzmacnia powtórzenie materiału, ale też uczy zarządzania czasem oraz pozwala przeżyć sytuację stresującą w sposób kontrolowany. Dodatkowo szczegółowa analiza błędów to szansa na lepsze zapamiętanie i uniknięcie tych samych błędów w przyszłości.

Powtórki

Powtórki z matematyki to kluczowy element skutecznego przygotowania się do egzaminu lub testu. Odpowiednia metoda powtórki pomaga nie tylko w przyswajaniu materiału, ale również w utrwalaniu wiedzy i rozwiązywaniu problemów w sposób efektywny. Oto kilka dobrych praktyk:

1) Stworzenie klasowego bądź szkolnego zbioru zadań egzaminacyjnych, ułożonych przez uczniów na podstawie zadań z podręczników, archiwalnych arkuszy egzaminacyjnych oraz Informatora CKE.
2) Utworzenie forum dyskusyjnego – klasowego bądź szkolnego – na Zintegrowanej Platformie Edukacyjnej, na którym uczniowie będą mogli dzielić się swoimi trudnościami i wspólnie rozwiązywać problemy. Uczestniczenie w grupach dyskusyjnych matematycznych (w szkole, on-

line, na forach) i wymiana pomysłów z innymi uczniami może pomóc w rozwiązaniu trudnych problemów oraz zrozumieniu różnych podejść do rozwiązywania zadań.

3) Utworzenie zasobu tzw. parkingu dla zadań trudnych – w tym miejscu uczniowie mogliby wskazywać zadania, które wymagają ponownego wytłumaczenia.
4) Opracowanie przez uczniów „Kompendium wiedzy" w postaci np. tablicy współtworzonej, na której systematycznie mogliby umieszczać zagadnienia do powtórek. Dobre rezultaty daje także opracowanie lapbooków.
5) Przygotowanie całorocznego kursu powtórkowego przed egzaminem na Zintegrowanej Platformie Edukacyjnej, który umożliwiłby uczniom samodzielne przygotowanie do egzaminu. Mógłby być realizowany metodą planu daltońskiego. Organizacja kursu na ZPE pozwala na ustawienie automatycznej samokontroli poprawności wykonania zadań.
6) Organizacja wykładów tematycznych online, np. na MS Teams, według rozdziałów z podstawy programowej w celu utrwalenia wiadomości. W określonym terminie nauczyciel prowadzi wykład podsumowujący cały rozdział, w dużych szkołach nauczyciele mogą się podzielić zagadnieniami. Aktywność ucznia ogranicza się do słuchania i patrzenia z możliwością zadania pytania po wykładzie lub w jego trakcie na czacie.
7) Opracowanie przez uczniów fiszek (*flashcards*). Stosowanie kart z pytaniami i odpowiedziami jest świetnym sposobem na powtórzenie definicji, wzorów oraz pojęć matematycznych. Przygotowane wcześniej wspólnie karty uczniowie mogą wykorzystywać do powtórek – losować i w ten sposób szybciej zapamiętać kluczowe informacje.
8) Wizualizacja matematyki poprzez rysowanie i modelowanie problemów. Często matematyka staje się łatwiejsza do zrozumienia, gdy „zobaczymy" problem. Rysowanie diagramów, przedstawienie zadania w formie graficznej pomaga w lepszym uchwyceniu zależności i rozwiązaniu problemu.
9) Konsultacje z nauczycielem. Częste rozmowy uczniów z nauczycielem o napotkanych trudnościach i niejasnościach są bardzo ważne. Uczniowie mogą prosić o wyjaśnienie trudniejszych zagadnień lub zapytać o różne techniki rozwiązywania zadań.

Przedstawione sposoby powtórek pomagają w systematycznym przyswajaniu wiedzy z matematyki oraz umożliwiają skuteczne przygotowanie się do egzaminów. Ważne jest, by dobrać metodę, która będzie najlepiej odpowiadała indywidualnym potrzebom ucznia, a także regularnie ćwiczyć i powtarzać materiał, aby nie zapomnieć zdobytej wiedzy.

Metody pracy na lekcjach

Na lekcjach matematyki można zastosować różne metody pracy, które sprzyjają skutecznym powtórkom i utrwalaniu materiału. Ważne jest, aby uczniowie aktywnie uczestniczyli w procesie nauki, angażując się w rozwiązywanie zadań, dyskusje i współpracę. Oto kilka metod pracy, które mogą być szczególnie skuteczne podczas powtórek z matematyki:

1) Praca w grupach
   - Wspólne rozwiązywanie zadań: Uczniowie mogą pracować w małych grupach nad rozwiązywaniem zadań matematycznych. To nie tylko rozwija umiejętności matematyczne, ale także uczy współpracy, dzielenia się pomysłami i rozwiązywania problemów.
   - Wymiana pomysłów i dyskusje: W grupach uczniowie mogą omawiać rozwiązania, wyjaśniać sobie nawzajem trudne zagadnienia i sprawdzać poprawność swoich odpowiedzi. Dzięki temu utrwalają materiał i uczą się, jak wyjaśniać i argumentować swoje rozwiązania.

2) Burza mózgów
   - Aktywne generowanie pomysłów: Burza mózgów to metoda, która sprzyja kreatywności i szybkiemu myśleniu. Nauczyciel może zaprezentować trudne zagadnienie matematyczne, a uczniowie w grupach proponują rozwiązania lub pomysły na podejście do problemu.
   - Rozwiązywanie zadań w różnych wariantach: Po wspólnej dyskusji, uczniowie mogą podjąć próbę rozwiązania zadania w różnych wariantach, np. stosując różne metody i strategie matematyczne.
3) Metoda „Pomyśl – Paruj – Podziel się" (*Think-Pair-Share*)
   - Indywidualne myślenie: Uczniowie najpierw indywidualnie zastanawiają się nad rozwiązaniem problemu matematycznego.
   - Wspólna praca w parach: Następnie, w parach, omawiają swoje pomysły, sprawdzają, czy mogą poprawić swoje rozwiązania.
   - Prezentacja wyników: Na końcu każda para dzieli się swoimi rozwiązaniami z resztą klasy, co daje możliwość omówienia różnych sposobów podejścia do problemu.
4) Rozwiązywanie zadań problemowych
   - Zadania otwarte i problemowe: Uczniowie mogą pracować nad zadaniami, które wymagają długoterminowego rozwiązywania, takich jak zadania projektowe lub problemowe. Dzięki nim uczniowie uczą się stosować teorię w praktyce.
   - Zastosowanie matematyki w życiu codziennym: Zadania mogą być powiązane z sytuacjami z życia codziennego (obliczenia związane z finansami, podróżami, architekturą itp.), co pozwala uczniom zrozumieć praktyczną stronę matematyki.
5) Metoda „Jigsaw" (Układanka)
   - Podział materiału na sekcje: Nauczyciel dzieli materiał na mniejsze części i przypisuje je różnym uczniom lub grupom. Każdy z uczniów uczy się jednego fragmentu tematu.
   - Prezentacja wyników: Po opracowaniu własnej części uczniowie spotykają się w nowych grupach, gdzie dzielą się wiedzą i prezentują rozwiązania pozostałym członkom grupy. Taka metoda uczy samodzielności, odpowiedzialności za swoją część materiału oraz umiejętności współpracy.
6) Quizy i gry matematyczne
   - Interaktywne quizy: Krótkie quizy to doskonały sposób na powtórzenie materiału. Uczniowie mogą brać udział w quizach na tablicy interaktywnej lub z wykorzystaniem aplikacji mobilnych np. Kahoot!.
   - Gry matematyczne: Gry, w których uczniowie muszą stosować zasady matematyczne, pomagają utrwalić wiedzę w przyjemny sposób. Przykłady stanowią: gry planszowe, aplikacje edukacyjne czy też łamigłówki matematyczne.
7) Tworzenie prezentacji lub plakatów
   - Praca nad prezentacjami: Uczniowie mogą przygotować prezentacje multimedialne lub plakaty na określony temat matematyczny. Tego typu prace rozwijają umiejętności analityczne, porządkowania wiedzy i kreatywności.
   - Prezentowanie wyników: Prezentacja przed klasą pozwala na utrwalenie wiedzy, dzielenie się pomysłami i wspólną analizę tematów.
8) Metoda odwróconej klasy (*Flipped Classroom*)
   - Nauka w domu, praca w klasie: W tej metodzie uczniowie najpierw zapoznają się z materiałem (np. poprzez obejrzenie filmików edukacyjnych, przeczytanie materiałów online), a na lekcji wykonują ćwiczenia praktyczne, rozwiązują zadania i omawiają problemy.

- Wspólna analiza: Nauczyciel staje się przewodnikiem, który pomaga rozwiązywać problemy napotkane przez uczniów podczas pracy w klasie. Dzięki temu uczniowie spędzają czas w szkole na aktywnej nauce.

9) Zajęcia z wykorzystaniem technologii
   - Interaktywne narzędzia online: Używanie narzędzi takich jak GeoGebra, WolframAlpha czy też aplikacji do nauki matematyki pozwala uczniom na pracę z matematycznymi zagadnieniami w sposób wizualny i interaktywny.
   - Zajęcia w formie gier komputerowych: Istnieją gry edukacyjne, które rozwijają umiejętności matematyczne, umożliwiając uczniom naukę poprzez zabawę.
10) Metoda *World Cafe* i uczenie innych (metoda Feynman'a)
   - Wytłumaczenie materiału innym: Jednym z najlepszych sposobów na utrwalenie wiedzy jest próba wytłumaczenia materiału innym osobom, np. kolegom lub członkom rodziny. Jeżeli potrafisz w prosty sposób wyjaśnić trudne zagadnienie matematyczne, oznacza to, że naprawdę je rozumiesz.
   - Prosta, zrozumiała narracja: Skupienie się na tym, by wytłumaczyć temat w sposób jak najbardziej zrozumiały dla innych, zmusza do zrozumienia wszystkich detali i elementów danego zagadnienia.

Dzięki różnorodnym metodom powtórek uczniowie nie tylko przyswajają wiedzę, ale również uczą się współpracy, samodzielności i odpowiedzialności za swoją naukę. Te metody pracy na lekcji są skuteczne, ponieważ angażują uczniów w proces nauki, rozwijają ich zdolności krytycznego myślenia oraz umożliwiają praktyczne stosowanie matematyki w różnych kontekstach.

Radzenie sobie ze stresem przed egzaminem

Nauczyciele powinni być wsparciem dla uczniów na każdym etapie przygotowań, wskazując kierunki pracy, udzielając pomocy w trudnych kwestiach oraz motywując do regularnej nauki. Dzieci uczące się w odpowiedniej atmosferze rodzinnej, w której rodzice aktywnie wspierają ich naukę, mają większą szansę na sukces. Rodzice mogą pomóc uczniom w organizacji nauki, monitorowaniu postępów oraz radzeniu sobie ze stresem.

Jednym z najlepszych sposobów na zminimalizowanie stresu jest odpowiednie przygotowanie się do egzaminu[3]. Stres najczęściej wynika z obawy przed nieznajomością materiału. Sporządzenie harmonogramu nauki i podzielenie materiału na mniejsze, łatwiejsze do przyswojenia części sprawia, że nauka staje się bardziej efektywna. Rozwiązywanie testów i zadań z poprzednich lat w warunkach zbliżonych do rzeczywistych pomoże oswoić się z egzaminacyjnym stresem i poprawi czas rozwiązania zadań. Poziom stresu obniża także pozytywne myślenie i wizualizacja, a także akceptacja stresu. Zrozumienie, że stres może być mobilizujący, a nie wyłącznie negatywny, pozwala lepiej go kontrolować. Ważne jest, by uczniowie wierzyli w swoje możliwości. Pozytywne nastawienie i wiara w siebie, choć może wydawać się niepozorne, mają ogromny wpływ na ostateczny wynik egzaminu.

Warto stosować proste techniki oddechowe i relaksacyjne[4].

Proste ćwiczenie oddechowe:

Skupienie się na głębokim, spokojnym oddechu pomaga zmniejszyć napięcie i stres. Można spróbować ćwiczenia „4-7-8": wdech przez nos na 4 sekundy, wstrzymanie oddechu na 7 sekund i wydech przez usta na 8 sekund. Ćwiczenie należy powtórzyć kilka razy, aby uspokoić umysł.

[3] Centralna Komisja Egzaminacyjna, *Jak radzić sobie ze stresem egzaminacyjnym? Zalecenia dla ósmoklasistów*, https://oke.jaworzno.pl/www3/wp-content/uploads/eo/materialy/2022/20220425_E8_Jak_radzic_sobie_ze_stresem_egzaminacyjnym.pdf [dostęp: 15.01.2025]

[4] UNICEF Polska, Ćwiczenie relaksacyjne i oddechowe dla dzieci i młodzieży, https://unicef.pl/content/download/46157/file/%C4%86wiczenie%20relaksacyjne%20i%20oddechowe.pdf [dostęp: 15.01.2025]

Relaksacja mięśni:

Prosta technika polega na napinaniu i rozluźnianiu poszczególnych grup mięśniowych, zaczynając od stóp i stopniowo przechodząc w górę ciała. Tego typu ćwiczenia pomagają rozładować napięcie w ciele i poprawić samopoczucie.

Niezwykle istotna jest odpowiednia dieta i sen. Należy unikać kofeiny, cukru, napojów energetycznych. Kofeina i duża ilość cukru mogą nasilać uczucie niepokoju i rozdrażnienia. Dieta bogata w białko, warzywa i owoce pomoże utrzymać energię i koncentrację. Zalecany jest lekki posiłek przed egzaminem i unikanie ciężkostrawnych potraw, które mogą sprawić poczucie ospałości.

Odpowiednia ilość snu (7-9 godzin) przed egzaminem jest kluczowa. Sen pozwala na regenerację umysłu i poprawia zdolności poznawcze. Brak snu pogarsza koncentrację i pamięć.

Ćwiczenia fizyczne, takie jak spacer, joga, jazda na rowerze, pomagają w redukcji stresu. Aktywność fizyczna zwiększa produkcję endorfin, hormonów odpowiedzialnych za poprawę nastroju. Zamiast ciągłego siedzenia nad książkami, warto co jakiś czas wstać, rozciągnąć się, zrobić kilka przysiadów czy po prostu pójść na krótki spacer. Taki reset pomaga w odzyskaniu energii i poprawie koncentracji. Odpowiednia równowaga między nauką a odpoczynkiem pozwala uniknąć wypalenia. Ważne jest, aby uczniowie regularnie odpoczywali, dbali o higienę snu, a także angażowali się w inne aktywności, które pozwolą im się zrelaksować.

Jeśli stres przed egzaminem staje się zbyt duży i trudny do opanowania, warto skonsultować się z psychologiem lub terapeutą. Techniki terapeutyczne, takie jak terapia poznawczo-behawioralna, mogą pomóc w lepszym radzeniu sobie z lękiem egzaminacyjnym.

Stres przed egzaminem jest czymś naturalnym, ale dzięki odpowiednim technikom można go kontrolować i zmniejszać jego negatywny wpływ. Kluczem jest odpowiednie przygotowanie, dbanie o zdrowie psychiczne i fizyczne oraz zachowanie pozytywnego nastawienia.

Zakończenie

Skuteczne przygotowanie uczniów do egzaminu z matematyki to proces, który wymaga od nauczycieli, uczniów oraz rodziców dużego zaangażowania, cierpliwości i systematyczności. Kluczowym elementem tego procesu jest stworzenie dobrze zaplanowanej i konsekwentnie realizowanej strategii, która nie tylko umożliwi osiągnięcie wysokich wyników na egzaminie, ale także pomoże uczniom w budowaniu pewności siebie w matematyce, co przyniesie im korzyści nie tylko w trakcie nauki, ale także w późniejszym życiu.

1) Planowanie – fundament sukcesu

Skuteczne przygotowanie do egzaminu z matematyki zaczyna się od dokładnego planu, który uwzględnia zarówno zakres materiału, jak i tempo nauki. Planowanie to nie tylko kwestia rozpisania dat, ale także ustalenia celów krótko- i długoterminowych. W planie nauki uczniowie powinni uwzględnić wszystkie kluczowe zagadnienia matematyczne, które muszą opanować, a także rozdzielić materiał na mniejsze części, co pozwala uniknąć poczucia przytłoczenia. Dobrze zaplanowane przygotowanie to także regularne przeglądy postępów – codziennie lub co kilka dni uczniowie powinni oceniać, co udało im się opanować, a które obszary wymagają jeszcze pracy. Dzięki temu unikają uczucia niepewności i mogą skupić się na najtrudniejszych zagadnieniach. Systematyczne planowanie i ścisłe trzymanie się harmonogramu zapewnia, że nie będzie opóźnień, a uczniowie będą mieli wystarczająco dużo czasu na powtórki i rozwiązywanie trudniejszych zadań.

2) Konsekwencja – klucz do sukcesu

Bez konsekwencji nawet najlepiej zaplanowana strategia nie przyniesie pożądanych rezultatów.

Regularność i systematyczność w nauce to elementy, które mają kluczowe znaczenie dla efektywności przygotowań. Każdego dnia, nawet jeśli wydaje się, że zadania są łatwe, uczniowie powinni poświęcić czas na naukę matematyki, aby utrzymywać ciągłość przyswajania wiedzy. To właśnie konsekwencja w rozwiązywaniu zadań, przyswajaniu teorii i systematycznym powtarzaniu materiału pozwala na głębsze zrozumienie matematyki, zamiast powierzchownego zapamiętywania wzorów i reguł. Częste powtarzanie i stosowanie wiedzy w różnych kontekstach sprawiają, że staje się ona bardziej zrozumiała i łatwiejsza do zapamiętania. Konsekwentne podejście do nauki pomaga również w uniknięciu stresu związanego z nadchodzącym egzaminem – kiedy uczniowie wiedzą, że regularnie pracują i widzą postępy, czują się pewniej.

3) Zaangażowanie – kluczowy element w budowaniu pewności siebie

Zaangażowanie uczniów w naukę matematyki jest równie istotne jak planowanie i konsekwencja. Kiedy uczniowie aktywnie angażują się w naukę, są bardziej skłonni do samodzielnego szukania odpowiedzi na trudniejsze pytania, zadawania pytań nauczycielom i wytrwałego dążenia do rozwiązania problemów. Ważne jest, by uczniowie poczuli, że matematyka to nie tylko zbiór reguł i wzorów, ale także dziedzina, która rozwija ich umiejętności logicznego myślenia, analizowania problemów i poszukiwania rozwiązań. Angażowanie się w naukę matematyki to także otwartość na różne metody rozwiązywania zadań, eksplorowanie różnych źródeł wiedzy i współpraca z innymi uczniami. Wspólna praca w grupach może pomóc uczniom zrozumieć, że matematyka to nie tylko indywidualna walka, ale także dziedzina, w której warto dzielić się pomysłami i wspólnie dążyć do rozwiązania problemów. To właśnie zaangażowanie, zarówno w naukę, jak i w aktywności pozalekcyjne, takie jak matematyczne konkursy czy dodatkowe zajęcia, może przyczynić się do większej motywacji i chęci do nauki.

4) Pewność siebie – efekt długofalowy

Ostatecznym celem skutecznego przygotowania uczniów do egzaminu z matematyki jest nie tylko uzyskanie wysokiego wyniku na teście, ale także zbudowanie pewności siebie w obcowaniu z matematyką. Uczniowie, którzy podejdą do egzaminu z poczuciem, że dobrze znają materiał i że potrafią poradzić sobie z zadaniami, będą w stanie lepiej zarządzać stresem i skupieniem w trakcie egzaminu. Budowanie pewności siebie to proces, który zachodzi stopniowo i jest efektem systematycznej pracy – rozwiązywania zadań, radzenia sobie z trudnościami i regularnego monitorowania postępów. Im więcej uczniowie osiągają sukcesów, tym bardziej wierzą w swoje umiejętności, co przekłada się na ich dalszy rozwój w matematyce oraz innych dziedzinach. Wzrost pewności siebie uczniów ma również długofalowe korzyści – młodzi ludzie, którzy czują się pewni swoich umiejętności matematycznych, są bardziej otwarci na naukę innych przedmiotów ścisłych i chętniej podejmą wyzwania związane z nauką w przyszłości.

5) Matematyka to umiejętność życiowa!

Skuteczne przygotowanie do egzaminu z matematyki nie kończy się na samej ocenie czy też wynikach testu. Matematyka to nie tylko zestaw zasad i wzorów, ale także umiejętność rozwiązywania problemów, logicznego myślenia i podejmowania decyzji. Dzięki dobrze zaplanowanej, konsekwentnej nauce uczniowie uczą się, jak radzić sobie z trudnymi zadaniami, jak stosować wypracowane metody w różnych sytuacjach, a także jak systematycznie dążyć do celu. Te umiejętności, które są niezbędne w matematyce, mogą zostać przeniesione na inne aspekty życia, takie jak rozwiązywanie problemów zawodowych, organizowanie pracy, podejmowanie decyzji. Matematyka staje się wówczas nie tylko przedmiotem szkolnym, ale i narzędziem, które pomaga uczniom w rozwoju osobistym i zawodowym przez całe życie.

Podsumowanie

W artykule omówiłam kluczowe strategie skutecznego przygotowania uczniów do egzaminu z matematyki, zwracając uwagę na różnorodne aspekty procesu nauczania i uczenia się. Sukces w nauce matematyki zależy nie tylko od systematycznego przyswajania wiedzy, ale także od odpowiedniego podejścia do rozwiązywania problemów, zarządzania czasem oraz budowania motywacji.

Ważnym elementem jest indywidualizacja nauczania, która uwzględnia potrzeby i tempo pracy każdego ucznia. Artykuł wskazuje na techniki, które mogą efektywnie wspierać przyswajanie materiału, takie jak ćwiczenia praktyczne, rozwiązywanie zadań z lat ubiegłych oraz korzystanie z narzędzi cyfrowych. Ponadto podkreślono znaczenie regularnych powtórek w utrwalaniu zdobytych umiejętności.

Kolejnym kluczowym aspektem jest rozwijanie umiejętności samodzielnego myślenia i kreatywności w rozwiązywaniu zadań matematycznych. Zajęcia, które koncentrują się na rozwiązywaniu złożonych problemów, pomagają w rozwijaniu logicznego myślenia oraz sprawności w analizie i syntezie informacji.

Dodatkowo zwróciłam uwagę na psychologiczny aspekt przygotowań do egzaminu z matematyki. Stres i presja mogą negatywnie wpływać na wyniki, dlatego istotne jest budowanie pewności siebie i pozytywnego nastawienia. Regularne powtórki i praktyczne ćwiczenia mogą pomóc w zmniejszeniu lęku przed egzaminem. Istotne jest również zarządzanie czasem i planowanie nauki, aby uniknąć poczucia przytłoczenia. Udzielanie wsparcia emocjonalnego ze strony nauczycieli i rodziców może pomóc uczniom w przezwyciężeniu trudności i utrzymaniu motywacji. Dbanie o równowagę między nauką a odpoczynkiem jest kluczowe dla dobrego samopoczucia psychicznego i efektywnego przyswajania wiedzy.

W kontekście motywacji znaczące jest, aby uczniowie rozumieli, dlaczego uczą się matematyki i jakie korzyści mogą z tego płynąć. Uświadamianie uczniom, że matematyka jest przydatna w życiu codziennym i może otworzyć drzwi do różnych ścieżek kariery, może zwiększyć ich zaangażowanie. Pozytywne wzmocnienie i docenianie wysiłku uczniów, nawet jeśli nie osiągają od razu idealnych wyników, jest kluczowe dla utrzymania ich motywacji i chęci do dalszej nauki.

Ważne jest, aby rodzice pamiętali, że celem przygotowania do egzaminu z matematyki nie jest tylko osiągnięcie wysokiego wyniku na egzaminie, ale także rozwój umiejętności matematycznych uczniów na dłuższą metę. Dlatego ich wsparcie powinno być ukierunkowane na rozwijanie samodzielnego myślenia, kreatywności i umiejętności rozwiązywania problemów.

Skuteczne przygotowanie do egzaminu z matematyki to kompleksowy proces, który wymaga współpracy nauczycieli, uczniów oraz rodziców. Wprowadzenie odpowiednich metod nauczania oraz konsekwentna praca w odpowiednim tempie pozwalają osiągnąć sukces, który przekłada się nie tylko na wysokie wyniki na egzaminie, ale również na rozwój umiejętności matematycznych uczniów w dłuższej perspektywie.

Chociaż artykuł nie odnosi się bezpośrednio do roli matematyki w życiu codziennym, warto podkreślić, że umiejętności matematyczne są niezbędne w wielu aspektach życia. Matematyka rozwija umiejętność logicznego myślenia, analizy i rozwiązywania problemów, które są przydatne nie tylko w szkole, ale i w pracy, finansach osobistych, a także w codziennych decyzjach. Zrozumienie podstaw matematyki pozwala lepiej orientować się w świecie i podejmować bardziej świadome wybory. Wzmocnienie umiejętności matematycznych to nie tylko przygotowanie do egzaminu, ale również inwestycja w przyszłość, która wpływa na rozwój osobisty i zawodowy każdego ucznia.

Kończąc, życzę Państwu satysfakcji z wyników egzaminacyjnych. Wasza rola w tym procesie jest nieoceniona – to dzięki Wam uczniowie nie tylko opanowują trudne zagadnienia matematyczne, ale

także uczą się, jak radzić sobie z wyzwaniami, rozwijać pewność siebie i wytrwałość. Efektywne przygotowanie uczniów do egzaminu z matematyki to proces, który wymaga cierpliwości, systematyczności oraz zastosowania odpowiednich metod nauczania. Kluczem do sukcesu jest równowaga pomiędzy teorią, praktyką, motywacją i dbałością o emocjonalną stronę procesu nauki.

Autorka:
Ewa Stelczyk, doradca metodyczny w zakresie matematyki i informatyki
Powiatowy Ośrodek Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej i Doradztwa Metodycznego w Oławie

Różnorodne formy pracy podczas zajęć szansą na rozwój osobisty ucznia

Metoda gier dydaktycznych ma wiele odmian. Ich wspólną cechę stanowi obecność pierwiastka zabawy w każdej z nich. Zabawa jest działaniem wykonywanym dla przyjemności, którą sama sprawia, stanowi więc właśnie przez to czynnik szczególnie pożądany w toku uczenia się. (...) Obok terminu zabawa istnieje w języku polskim termin gra. Jest gra taką odmianą zabawy, która polega na przestrzeganiu dokładnie sprecyzowanych reguł. Przyzwyczajając do respektowania reguł gra spełnia ważne funkcje kształcąco-wychowujące: służy procesowi poznania, uczy poszanowania przyjętych norm, umożliwia współdziałanie, sprzyja uspołecznieniu, przyzwyczaja zarówno do wygrywania, jak i przegrywania.

Wincenty Okoń[1]

Przez zabawę do wiedzy

Gry edukacyjne, zabawy i konkursy przedmiotowe oraz międzyprzedmiotowe stały się stałą częścią szkolnej rzeczywistości, wzbogacają i uatrakcyjniają zajęcia lekcyjne i pozalekcyjne. Skierowane są one nie tylko do uczniów zainteresowanych, ale mogą też być sposobem na motywowanie do nauki nawet tych uczniów, którzy początkowo nie byli wystarczająco zaangażowani. Droga wiedzie tu poprzez zabawę do wiedzy. Zdrowa rywalizacja w grupie jest najlepszą formą motywowania do pracy, może ona pomóc osiągnąć wyznaczony cel. Skutecznie pobudzi uczniów do poznania własnych ograniczeń i pracy nad nimi.

Udział w konkursach lub innych formach współzawodnictwa wpływa na budowanie poczucia pewności siebie. Podczas nich uczniowie mogą pracować nad samooceną. Tego typu formy zajęć przygotowują młodego człowieka do dorosłego życia. Uczą współpracy w grupie, szczególnie formy drużynowe. Pomagają w budowaniu pomiędzy uczniami więzi i zdobywaniu nowych przyjaźni. Uczniowie uczą się ponosić porażki. Łatwiej jest im zaakceptować niepowodzenia szczególnie wtedy, gdy pracują wspólnie w drużynie, w grupie czy zespole.

Musimy jednak pamiętać o nagradzaniu ich za włożony wysiłek. Docenić nawet tych uczniów, którym nie udało się uzyskać pierwszego miejsca czy wysokiego wyniku. Należy uznać ich wkład i zaangażowanie.

Korelacja międzyprzedmiotowa

W grę, zabawę lub konkurs przedmiotowy można wpleść elementy międzyprzedmiotowe. Przygotowane dla uczniów zadania z matematyki mogą być zapisane np. w języku angielskim. Możemy zaprosić do współpracy nauczyciela języka obcego i ćwiczyć kilka kluczowych umiejętności jednocześnie. Warto przygotować uczniom, jeśli jest taka potrzeba, niezbędny do zrozumienia treści zadań słowniczek. Uczniowie będą mieli możliwość nie tyko pracować nad umiejętnościami matematycznymi, logicznymi, ale także poznawać nowe zwroty w języku obcym.

[1] Okoń, W. (2003), Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej, Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak". Str. 265-266.

Początkujący nauczyciel matematyki

Nie każdy młody, początkujący nauczyciel ma wystarczająco bogaty zbiór materiałów dydaktycznych. Nie zawsze jest w stanie przygotować samodzielnie materiały dla uczniów. Dlatego warto, aby przygotowując się do zajęć, korzystał z gotowych, opracowanych przez bardziej doświadczonych kolegów czy koleżanki materiałów. Warto doskonaląc swój warsztat pracy wykorzystywać zasoby Internetu.

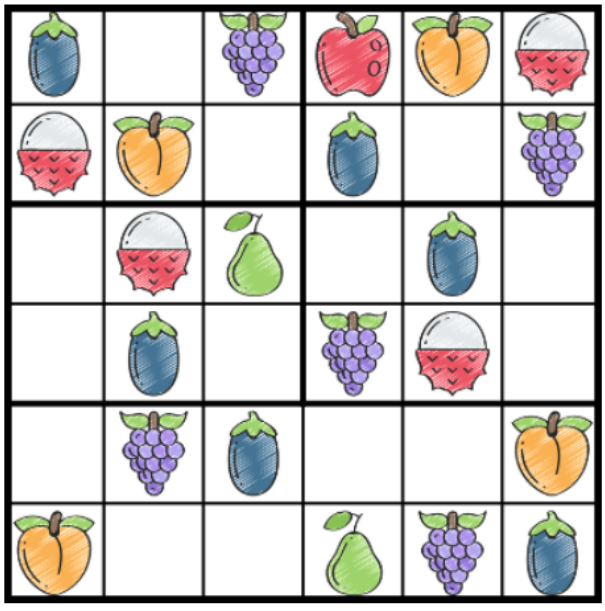
Przykładowe narzędzia wspierające edukację

W budowaniu arkuszy zadań dla uczniów możemy użyć bezpłatnych narzędzi dostępnych w Internecie. Polecam korzystać z podanych poniżej stron i platform edukacyjnych. Zawierają one nie tylko interaktywne ćwiczenia, gotowe materiały do pobrania z sieci, ale i generatory służące do tworzenia spersonalizowanych kart pracy, gier planszowych lub łamigłówek. Generatory dają nam możliwość dostosowania przygotowywanych materiałów do potrzeb, możliwości i poziomu uczniów. Nie powinniśmy obawiać się wykorzystywania w swojej pracy stron obcojęzycznych.

EDUZABAWY

Eduzabawy[2] to narzędzie do tworzenia szablonów z zadaniami i ćwiczeniami dla uczniów. Jest tu darmowy generator kart pracy do druku do matematyki, języka polskiego i języków obcych. Generator ten daje możliwość pobrania karty pracy w formacie pdf lub od razu wydrukowania go.

Możemy przygotować dla uczniów na przykład sudoku liczbowe lub obrazkowe, dostosowując poziom trudności do możliwości i poziomu umiejętności naszych uczniów. Przykładowe karty pracy znajdują się poniżej.



	5		3	9	8		7	4
	6	3	2		7	5	9	
7			5		6			8
4		7	1	5		2	6	
	1	5					8	7
6			8		4			5
		4	7	2	9		5	
9	2	6	4	8	5	7		
	7	8	6	3	1	9		2

Rys 1. Przykładowa karta pracy

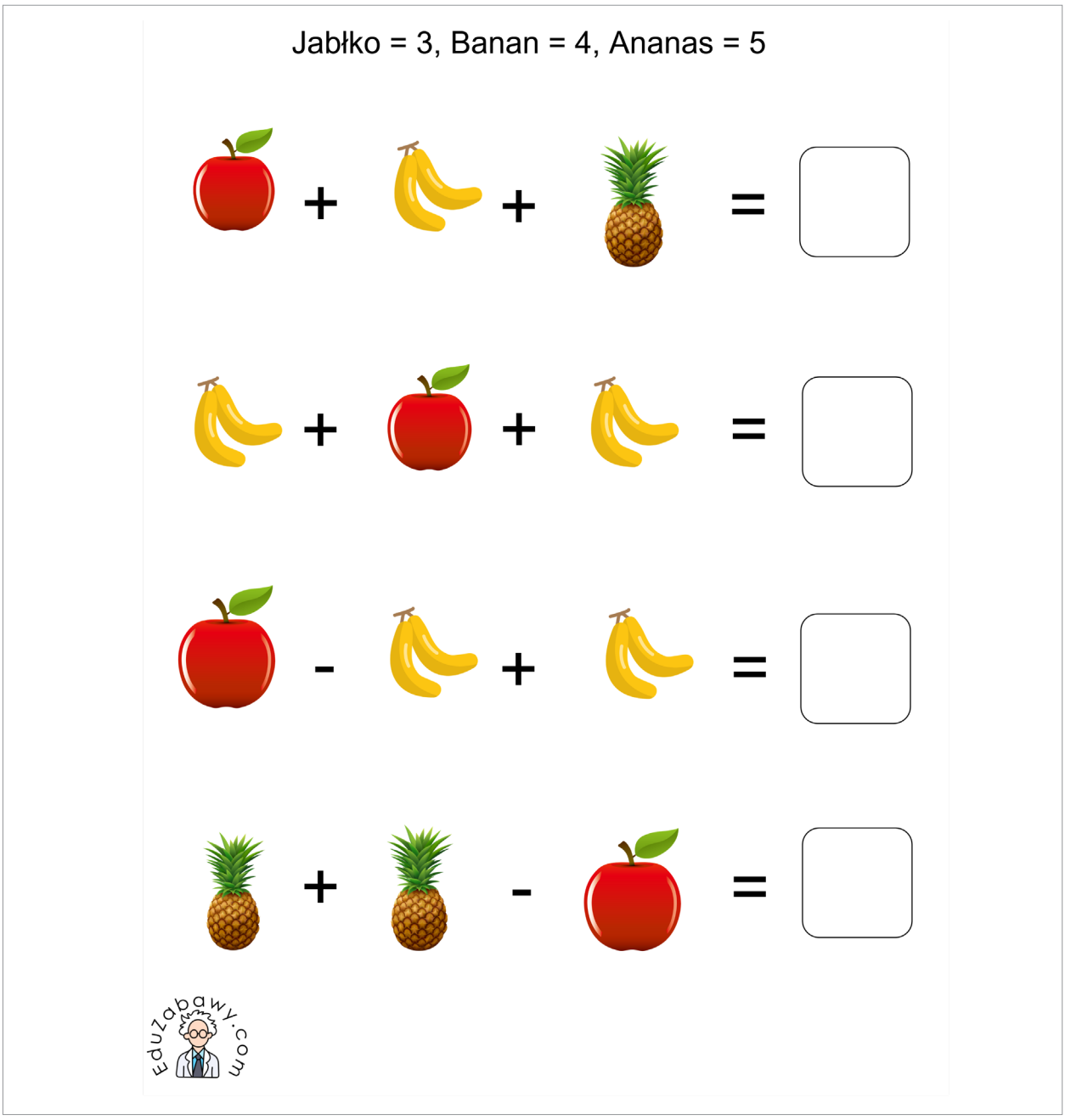
Wygenerować możemy także zagadki matematyczne oraz inne matematyczne karty pracy. Mogą nam się one przydać podczas zajęć z uczniami. Generujemy je uwzględniając wiek i możliwości naszych uczniów oraz nasze potrzeby (Rys 2).

2 https://eduzabawy.com

CANVA

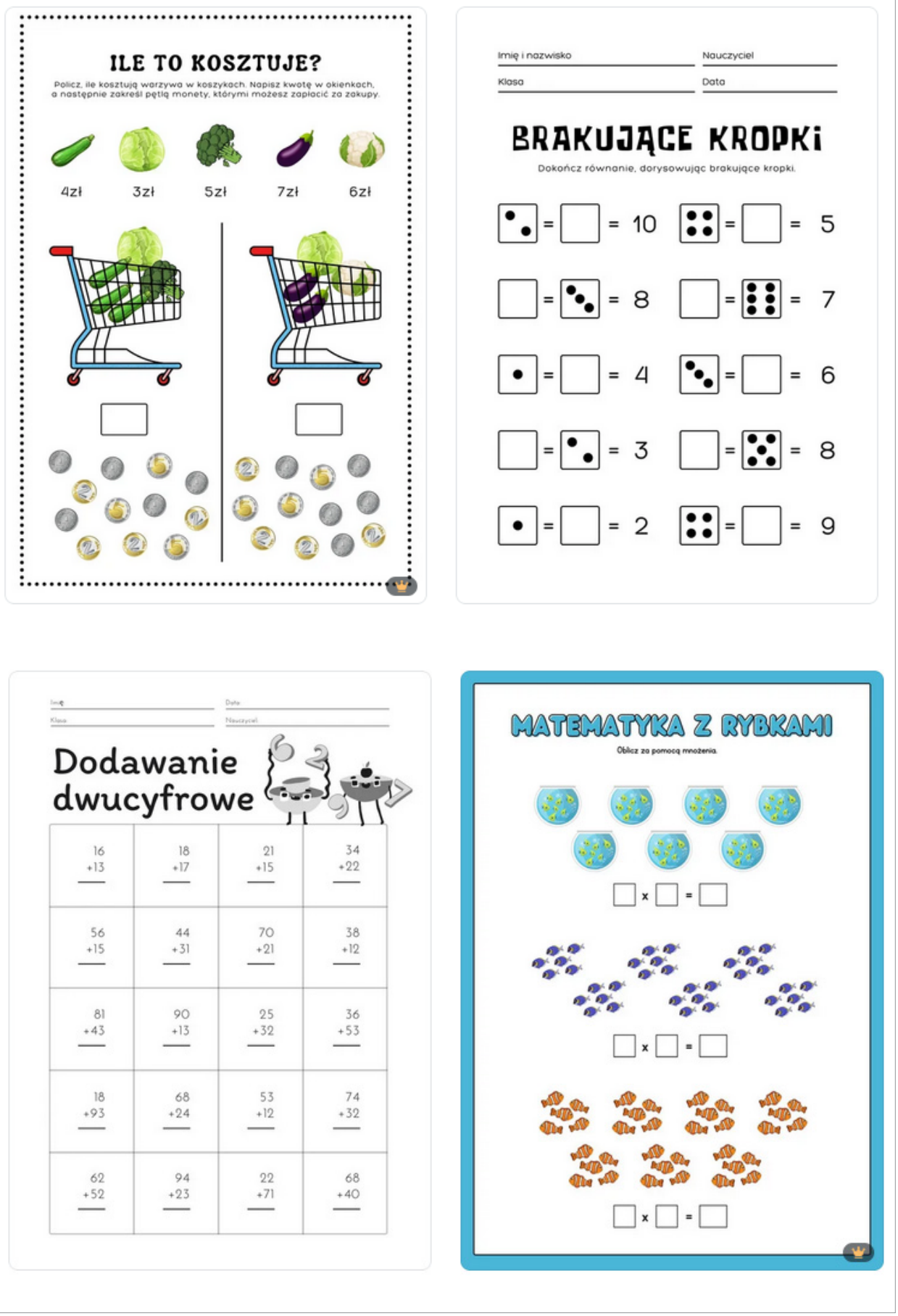
Uczniowie i nauczyciele mogą uzyskać bezpłatny dostęp do zaawansowanej wersji Canva for Education za pośrednictwem swojego loginu w Zintegrowanej Platformie Edukacyjnej (ZPE), dostępnej na stronie www.zpe.gov.pl.

Za pomocą planu Canva dla szkół możemy tworzyć interesujące lekcje i ćwiczenia dla uczniów. Możemy otrzymać dostęp do tysięcy szablonów, które sprawdzą się w przypadku każdego przedmiotu, klasy i tematu. Możemy również korzystać ze wszystkich funkcji premium platformy Canva nieodpłatnie[3]. Canva zawiera także wzory i szablony zadań i kart pracy z matematyki.

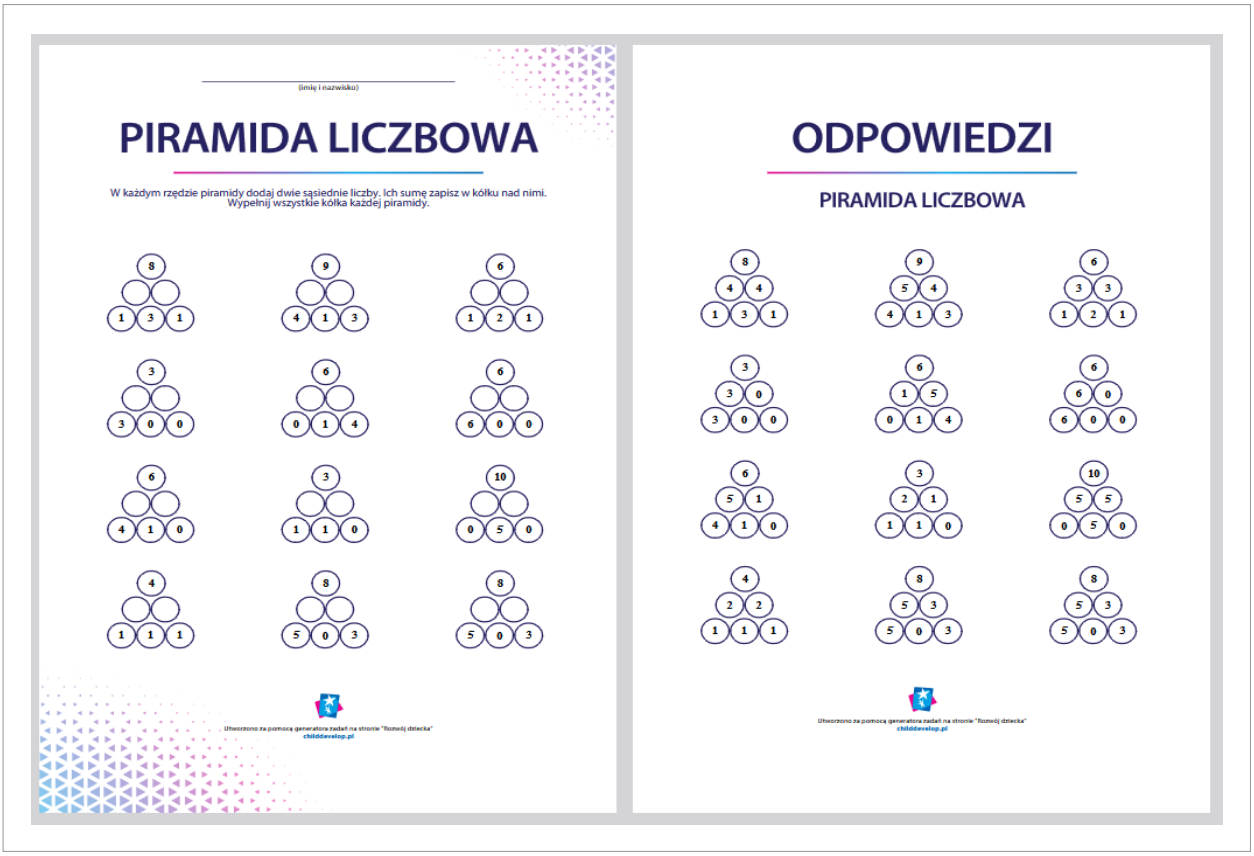


Rys 2. Przykładowa karta pracy

3 www.canva.com



Rys 3. Przykładowa karta pracy



Rys 4. Przykładowa karta pracy

ROZWÓJ DZIECKA

Childdevelop[4] to ponad 7000 praktycznych zadań z matematyki i logiki, języka polskiego, języka angielskiego i innych przedmiotów. Na stronach odnaleźć możemy interesujące łamigłówki, gry edukacyjne i praktyczne zadania dla dzieci. Znajdziemy tu dziecięce łamigłówki rozwijające u dzieci logiczne myślenie, pamięć, uwagę, zdolności motoryczne. Są tu różnego rodzaju układanki, labirynty, krzyżówki.

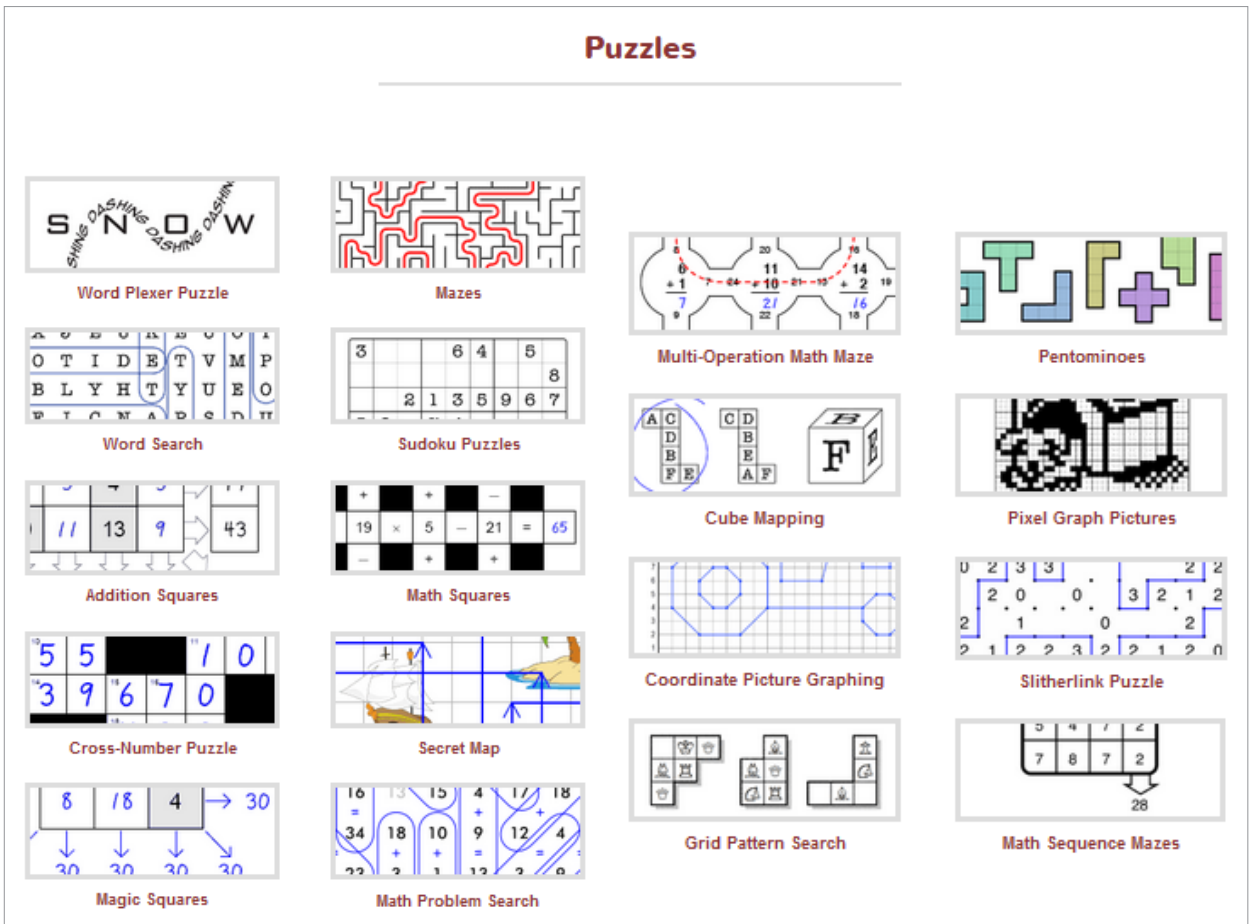
Karty pracy generowane przez to narzędzie mogą być przygotowane, wydrukowane w formacie pdf i wykorzystywane w różnych sytuacjach edukacyjnych. Mogą być stosowane zarówno w szkole, na lekcjach matematyki, podczas konkursów, jak i jako materiały do nauki indywidualnej. Pomagają rozwijać umiejętności matematyczne, logiczne myślenie oraz zdolność rozwiązywania problemów.

WORKSHEETWORKS

Strona ta umożliwia dynamiczne tworzenie kart pracy[5]. Są one posegregowane według poszczególnych kategorii. Znajdziemy tu np. magiczne kwadraty, puzzle, krzyżówki, zadania na wykreślanie, a także zadania kształtujące podstawowe umiejętności matematyczne, takie jak dodawanie, mnożenie, dzielenie, zadania z geometrii itp. Podczas budowania kart pracy mamy możliwość ustalenia stopnia trudności zadań (Rys. 5).

4 https://childdevelop.pl

5 https://www.worksheetworks.com/math.html oraz https://www.worksheetworks.com/puzzles.html



Rys 5. Przykładowe karty pracy



Rys 6. Przykładowa karta pracy

SALA GIER

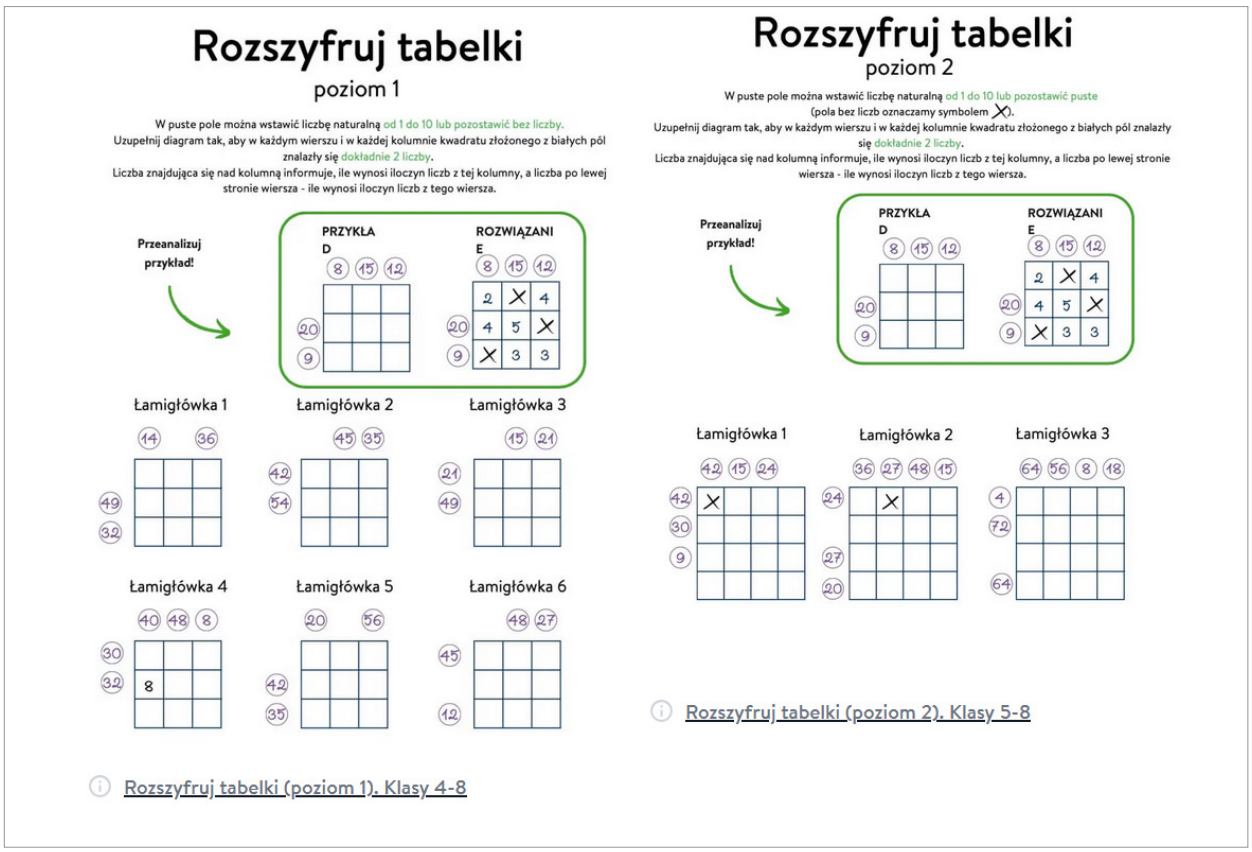
Sala gier[6] to nie tylko rebusy, sudoku, kolorowanki do wydrukowania, krzyżówki czy labirynty. To również bezpłatne gry dla najmłodszych. Dzięki wygenerowanym tu kartom pracy uczniowie będą mogli ćwiczyć dodawanie, odejmowanie oraz inne działania matematyczne. Pobudzą one u uczniów proces kreatywnego myślenia. Łamigłówki, rebusy i inne zadania do wydrukowania będą stanowiły świetną zabawę (Rys. 6).

KARTY GRABOWSKIEGO

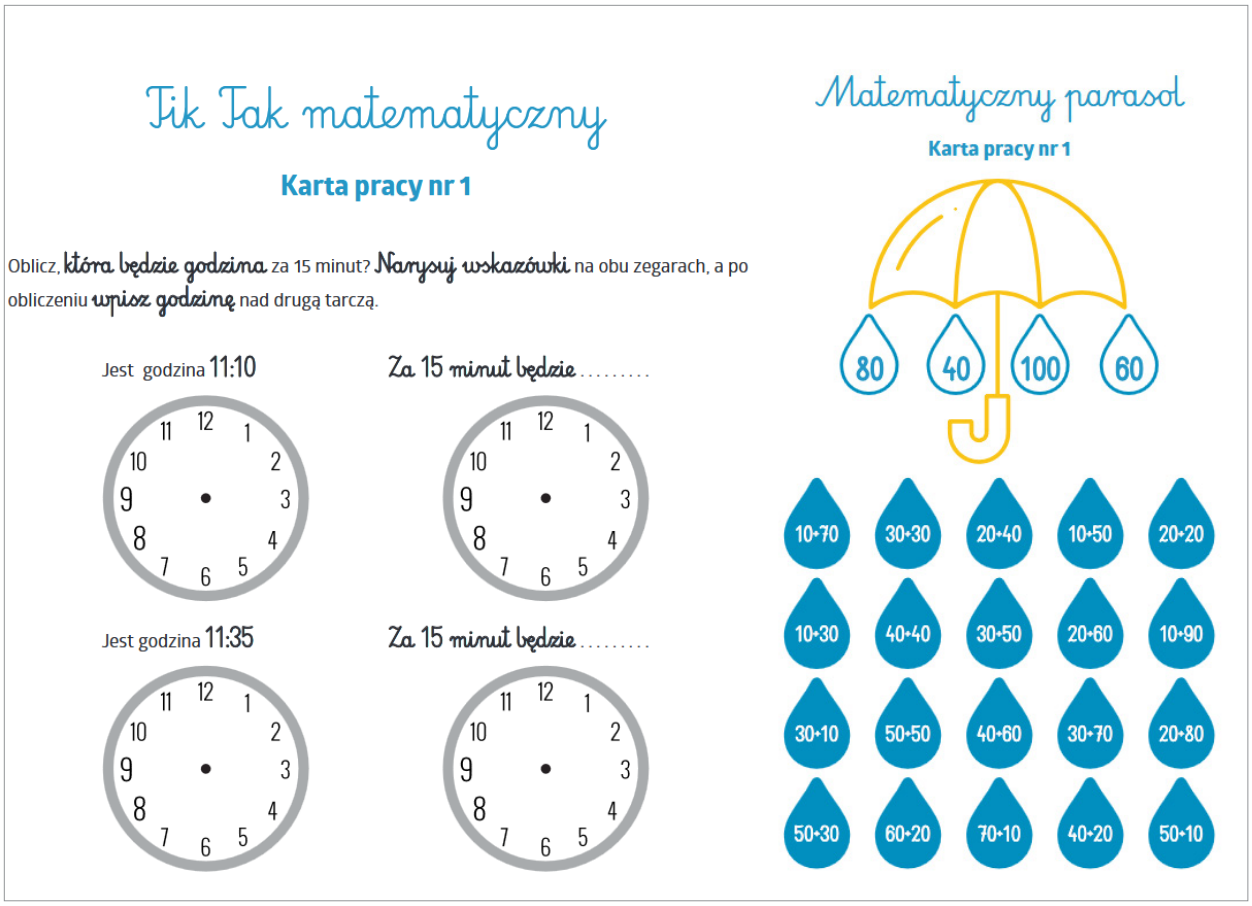
Andrzej Grabowski – twórca Kart Grabowskiego – jest pomysłodawcą Światowego Dnia Tabliczki Mnożenia. Z tej okazji jego zespół przygotował zestaw łamigłówek, dzięki którym uczniowie będą mieli okazję przypomnieć sobie tabliczkę mnożenia i poćwiczyć logiczne myślenie. Na stronie[7] opracowanej przez współpracowników znajdują się, ułożone według poziomu trudności, karty z łamigłówkami (Rys. 7).

6 https://salagier.pl/matematyka

7 https://kartygrabowskiego.pl/blog/lamiglowki-z-mnozeniem-i-dzieleniem



Rys 7. Przykładowa karta pracy



Rys 8. Przykładowa karty pracy

SZKOŁA Z KLASĄ

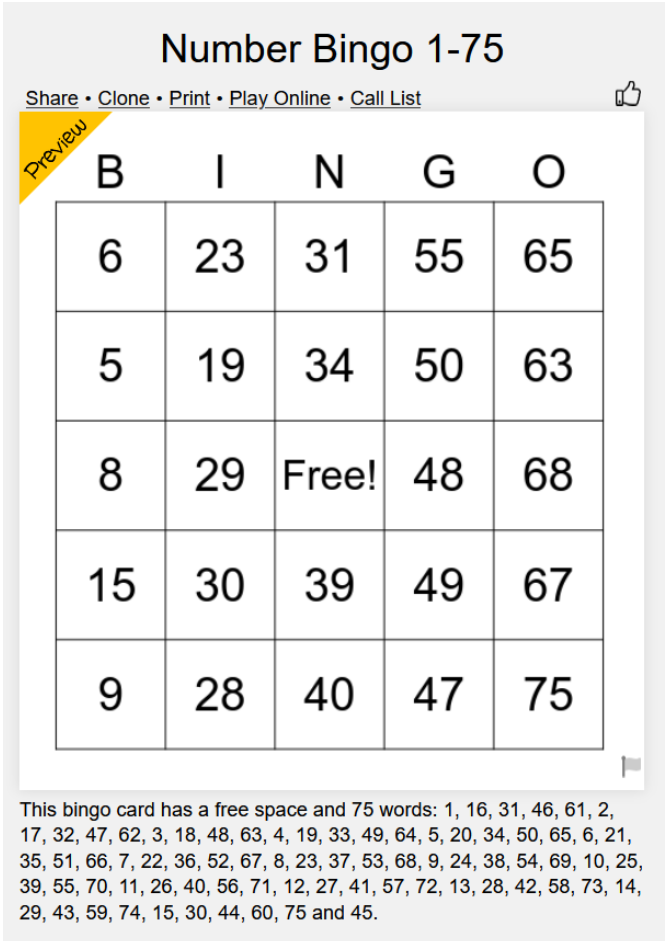
W tej bezpłatnej bibliotece materiałów znajdują się gotowe scenariusze lekcji, pomysły na gry i zabawy, pomoce dydaktyczne, poradniki i publikacje, które wspierają dyrektorów i nauczycieli w prowadzeniu innowacyjnych, angażujących zajęć. „Szkoła z klasą”[8] specjalizuje się w *design thinking*, wykorzystaniu nowych technologii, przestrzeniach edukacyjnych, organizacji pracy szkoły. Znajdują się tu materiały na wszystkie przedmioty i poziomy nauczania (Rys. 8).

Fundacja Szkoła z Klasą

BINGO

Bingo Baker[9] ma miliony kart bingo, których można użyć na każdą okazję. Można użyć gotowych kart lub wykorzystać prosty generator, aby stworzyć własną.

Bingo jest idealnym sposobem, by doskonalić umiejętności matematyczne oraz na sprawdzenie wiedzy uczniów. Grając w bingo uczniowie mogą pracować indywidualnie lub drużynowo.



Rys 9. Przykładowa karta pracy

8 https://www.szkolazklasa.org.pl/materialy/

9 https://bingobaker.com

Konkursy matematyczno-logiczne

Od ponad 20 lat jestem doradcą metodycznym w Powiatowym Ośrodku Pomocy Psychologiczno-Pedagogicznej i Doradztwa Metodycznego w Oławie. Wychodząc naprzeciw potrzebom koleżanek i kolegów, od 21 lat organizuję dla uczniów naszego powiatu konkurs matematyczno-logiczny. Przebiega on dwuetapowo. Pierwszym etapem jest etap szkolny, indywidualny. Przeprowadzają go nauczyciele we własnych placówkach. Drugi etap – powiatowy, w którym biorą udział czteroosobowe zespoły z każdej ze szkół – składa się z dwóch części: indywidualnej (tu uczniowie klasyfikowani są indywidualnie) i drużynowej (wspólnie nad zadaniami pracują czteroosobowe zespoły z każdej ze szkół).

Po kilkunastu latach, zauważając duże zaangażowanie i zainteresowanie nauczycieli i uczniów, postanowiłam zaproponować konkurs, podczas którego wymagana jest wiedza matematyczna z zakresu treści zawartych w podstawie programowej szkoły podstawowej oraz znajomość języka angielskiego i niemieckiego w stopniu pozwalającym na zrozumienie treści zadań i udzielenie krótkiej odpowiedzi. Arkusz zadań zawiera zadania z matematyki oraz zadania logiczne w wersji angielskiej lub niemieckiej. Uczniowie rozwiązują je drużynowo. Zadania do konkursu przygotowuję we współpracy z nauczycielami języków obcych już od 6 lat. Można zaobserwować, że przez te kolejne lata zainteresowanie udziałem w konkursach wśród uczniów i nauczycieli nie maleje. Dzieje się tak na pewno dzięki ogromnemu zainteresowaniu i współpracy nauczycieli matematyki z zaprzyjaźnionych szkół. Ale wieloletnia obserwacja pokazuje mi także, że jest wśród uczniów (nawet tych wchodzących w dorosłe życie, a wielu z nich jest już pełnoletnich) ogromna chęć nauki przez zabawę. Pokazuje to, że niezależnie od wieku, warto podczas rozwijania kompetencji matematycznych uczniów, wplatać różnego rodzaju atrakcyjne metody i formy pracy. Wywierają one istotny wpływ na kształtowanie kompetencji matematycznych uczniów.

Jeśli tylko nauczyciel pamięta o stworzeniu odpowiedniej atmosfery w klasie, grupie, zespole uczniów, zadba, by zrozumieli oni reguły, zasady i cel zabawy, a także doceni wysiłek wszystkich biorących udział w zajęciach, ma szansę w odpowiedni sposób pokierować uczestnikami zajęć. Nawet w przypadku tych zgłaszających trudności w nauce matematyki, także wtedy, gdy tracą oni motywację do nauki. Stosowanie atrakcyjnych metod i form pracy podczas różnych aktywności może zachęcić ucznia do pokonywania własnych barier.

Autorka:
Agnieszka Czerniawska, doradca metodyczny w zakresie matematyki
Powiatowy Ośrodek Poradnictwa Psychologiczno-Pedagogicznego i Doradztwa Metodycznego w Polkowicach

Błąd kluczem do nauki i rozwoju

Czym właściwie jest błąd? To inaczej pomyłka, niepowodzenie czy niedopatrzenie. Może przyjmować różne formy: od drobnych uchybień po poważne pomyłki, od gramatycznych poprzez logiczne, rachunkowe, aż po historyczne lub polityczne. Słowniki podkreślają szerokie znaczenie tego terminu i jego wszechobecność w języku. Błędy są często źródłem wstydu – zarówno w codziennym życiu, jak i w relacjach międzyludzkich. Przykładem mogą być rodzice, którzy wstydzą się za błędy swoich dzieci, czy politycy wytykający sobie wzajemne niedociągnięcia.

Młodym ludziom często odmawia się prawa do popełniania błędów, a za ten stan rzeczy współodpowiedzialni są dorośli. Błąd jest postrzegany jako coś wstydliwego, często dowodzącego przeciętności, zwyczajności lub bylejakości, co prowadzi do negatywnych konsekwencji. Aby zrozumieć, jak uczniowie postrzegają błędy, przeprowadziłam badanie na grupie młodzieży w trzech klasach. Uczniowie zostali zapytani, z czym kojarzy im się błąd. Najczęstsze odpowiedzi to: porażka, strach i wstyd. Większość skojarzeń miała wyraźnie negatywny wydźwięk.

Jak szkoła i społeczeństwo podchodzą do błędów?

W szkole nauczyciele (oczywiście nie wszyscy) często, zamiast skupiać się na przekazywaniu wiedzy, koncentrują się na „złapaniu" ucznia na błędzie. Nierzadko padają słowa: „Jak mogłeś to zrobić?", „Nie wolno tak robić!", „Tak jest źle.", „Nie można było tak od razu?". Takie komunikaty wpływają na skojarzenie popełnionego błędu z przykrymi emocjami, poczuciem winy, lękiem, smutkiem, zawodem. Kształtuje się przy tym przekonanie, że nie powinno się w ogóle popełniać błędów, bo są kategorycznie złe i skoro nam się zdarzyły, to jest z nami coś nie tak.

Niektórzy młodzi ludzie mogą być bardzo samokrytyczni wobec siebie, gdy popełniają błędy. Mogą przeżywać wewnętrzną krytykę i negatywne myśli na swój temat. W badaniu padały również odpowiedzi typu: „Jestem głupi, jestem błędem". Następuje często atak na samego siebie wyrażony zwrotem: „Jestem głupi, więc nie mogę być mądry". Zmniejsza się poczucie własnej wartości, satysfakcji i zaangażowania. Czasem wystarczyłaby zmiana podejścia (swojego lub innych) i powiedzenie: „Popełniłam/-em błąd, ale wyciągnęłam/wyciągnąłem wnioski, drugi raz zrobię to inaczej".

Młodzi ludzie często nie boją się samej porażki, ale bardziej obawiają się reakcji innych na ich niepowodzenia. Strach przed wyśmianiem, krytyką i negatywną oceną przez rówieśników, nauczycieli, rodziców czy osoby, które są dla nich ważne, może być paraliżujący. Wynika to z naturalnej potrzeby akceptacji i przynależności do grupy, co jest szczególnie silne w okresie dojrzewania.

Zastanówmy się teraz: jak reagujemy na błędy popełniane przez nasze dzieci, a jak reagują nasze dzieci, gdy wytykamy im błędy? Sięgnijmy pamięcią do czasów, gdy dziecko zaczynało naukę chodzenia. Przewracało się wiele razy. Dorośli wtedy bili mu brawo, przekonani, że dziecko musi się przewracać. Tak samo, gdy dziecko uczyło się jazdy na rowerze czy nartach. Nie można się tego nauczyć bez upadków. Co się z nami dzieje, gdy dzieci idą do przedszkola, a zwłaszcza do szkoły? Błędy

zaczynają być wytykane, piętnowane. Skąd się to bierze? Z przekonania, że uczeń musi już to umieć, bo inne dziecko potrafi. Kasia lub Krzyś już liczą poprawnie, a Zosia jeszcze popełnia błędy.

Zarówno rodzice, jak i nauczyciele często oczekują, że dziecko nie może być „gorsze" od innych, zapominając, że każdy ma inne możliwości. Z odkryć neurodydaktyki wiemy, że mózg każdego dziecka rozwija się inaczej, w różnym tempie – zwłaszcza jeśli chodzi o matematykę. Różnica może wynosić trzy lata, a nawet więcej. Nie zdajemy sobie sprawy, jakie konsekwencje może przynieść nasza reakcja na błędy popełniane przez dzieci, np. w postaci ochłodzenia relacji rodzica z dzieckiem lub ucznia z nauczycielem. Dziecko szuka wsparcia poza rodziną, wśród zupełnie obcych osób i instytucji. Tracimy wtedy kontakt z dzieckiem, nastolatkiem.

My, dorośli, w tym także nauczyciele, nie mamy świadomości, jak wiele przekonań transmitujemy na dzieci, zwłaszcza w edukacji wczesnoszkolnej. Dlatego zmianę należy zacząć od siebie. Naszą rolą jest ukazanie dzieciom, że wielokrotnie w życiu coś nam nie wyszło. I nie chodzi o to, by eksponować dorosłe porażki, ale pokazać, że poradziliśmy sobie z nimi w taki czy inny sposób. Dzięki temu dzieci nabierają przekonania, że ich rodzice, którzy wydają się idealni, też mają trudności i radzą sobie z nimi.

Ciekawe są badania psychologiczne nad zjawiskiem wypalenia rodzicielskiego, prowadzone przez Konrada Piotrowskiego z Uniwersytetu SWPS w Poznaniu (Piotrowski, 2022, s. 9-23; Dzielińska, 2023, s. 115-133). Pokazują one, że wysoki poziom perfekcjonizmu rodziców rzutuje na funkcjonowanie dziecka. Jeśli rodzic jest przesadnie perfekcjonistycznie nastawiony do swoich działań i funkcjonowania społecznego, dziecko staje się bardziej lękowe, wykazuje większy poziom niepewności i mniejszą otwartość na doświadczenia.

Musimy zatem zdawać sobie sprawę, że popełnianie błędów jest nieodłącznym elementem procesu uczenia się i osobistego rozwoju. Mimo że często postrzegamy je negatywnie, w rzeczywistości mogą on odegrać kluczową rolę w naszym samodoskonaleniu. Analizowanie i zrozumienie własnych pomyłek nie tylko dostarcza nam cennych informacji, ale także inspiruje do podejmowania nowych wyzwań i zdobywania nowych umiejętności. Chociaż nikt nie lubi popełniać błędów, zwłaszcza publicznie, w najlepszym interesie szkół, nauczycieli, rodziców i uczniów jest pogodzenie się z nimi – a nawet pozytywny stosunek do nich.

Jak to zrobić? Przede wszystkim zmienić, jeśli jeszcze tego nie dokonaliśmy, nastawienie do błędu – i tę zmianę należy zacząć od siebie. Jest wiele znanych osób, które przezwyciężyły niepowodzenia. Przykłady z ich życia można wykorzystać w pracy z uczniami nad zmianą podejścia do błędu. Steve Jobs jest uznawany za jednego z najbardziej innowacyjnych przedsiębiorców naszych czasów, mimo że popełniał wiele błędów w swojej karierze. Był zwolniony z własnej firmy Apple, ale później powrócił i przyczynił się do jej przełomowego sukcesu. J. K. Rowling, zanim napisała serię książek o Harrym Potterze, musiała przejść przez wiele trudności. Była bezrobotną matką samotnie wychowującą dziecko, a jej pierwsza książka została odrzucona przez wielu wydawców, zanim autorka w końcu zrobiła karierę pisarską. Michael Jordan, choć jest uważany za jednego z najlepszych koszykarzy wszech czasów, doświadczył wielu porażek w swojej karierze. Był odrzucany z drużyny koszykówki w szkole średniej, ale nie zraziło go to i kontynuował pracę, osiągając później wielki sukces. Podobnie rzecz się miała chociażby z Waltem Disneyem. Według wielu relacji otwarcie Disneylandu w 1955 roku było katastrofą – przybyło dwa razy więcej gości niż przewidywano, zwiedzający musieli czekać w długich kolejkach, wiele atrakcji nie działało, a dostawy żywności były niewystarczające. W dodatku buty odwiedzających grzęzły w świeżo wylanym asfalcie. Mimo tych problemów Disney nie zniechęcił się i kontynuował rozwijanie swojego parku rozrywki, który dziś jest jednym z najpopularniejszych miejsc na świecie.

Co by było, gdyby ci ludzie poddali się po pierwszej próbie?

Dlatego warto spróbować w swoim życiu przyjąć postawę zaprezentowaną na powyższych przykładach i rozpowszechniać je wśród innych, zwłaszcza uczniów.

Współczesne podejście do błędów w wielu firmach, szczególnie w branży IT, opiera się na koncepcji ciągłego doskonalenia i iteracyjnego podejścia do pracy. W tym kontekście błąd nie jest porażką, ale raczej naturalnym etapem procesu uczenia się i rozwijania nowych umiejętności. Takie podejście sprzyja rozwojowi kreatywności, samodzielności i zaangażowania, co jest szczególnie ważne w dynamicznie zmieniającym się świecie. Podobnie w edukacji konieczne jest wprowadzenie kultury akceptacji błędów, co pozwoli uczniom na swobodne eksperymentowanie i podejmowanie inicjatywy bez obawy przed karą za ewentualne pomyłki.

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na potrzebę kształcenia kompetencji 4K – czyli kreatywności, krytycznego myślenia, komunikacji i kooperacji – tak kluczowych w dzisiejszym świecie, gdzie elastyczność i umiejętność przystosowania się do zmieniających się warunków są nieodzowne. Zapotrzebowanie na liderów, którzy potrafią inspirować i prowadzić zespoły w dynamicznych i nieprzewidywalnych okolicznościach, rośnie z każdym dniem. Liderzy ci muszą umieć akceptować błędy jako naturalną część procesu nauki i rozwoju, a także inspirować innych do ciągłego doskonalenia się.

Skąd zainteresowanie kulturą błędu?

Człowiek uczy się przez całe życie. Nawet ja, jako nauczyciel z długoletnią praktyką, doświadczyłam sytuacji, która skłoniła mnie do przewartościowania swojego podejścia do błędów uczniowskich, sposobu ich korygowania, prowadzenia zajęć oraz budowania lepszych relacji z uczniami.

Kilka lat temu, podczas rozdawania kartkówek, poprosiłam:

— Kasia, podejdź i zobacz, jaki głupi błąd popełniłaś.

Nie spodziewałam się jednak, jak potoczy się ta sytuacja. Zanim Kasia zdążyła zareagować, dwie koleżanki z tyłu natychmiast zerwały się z ławek i podbiegły do biurka, dopytując z zaciekawieniem:

— Jaki? Jaki?

Dopiero wtedy zauważyłam, że Kasia zrobiła się czerwona, a w jej oczach pojawiły się łzy. Zrozumiałam, że to nie ona, lecz ja popełniłam znacznie większy błąd. Natychmiast postanowiłam naprawić sytuację.

— Bardzo dobrze, że ten błąd się pojawił — powiedziałam. Wiecie, kiedy nauka jest najskuteczniejsza? Właśnie wtedy, gdy towarzyszą jej emocje i gdy uczymy się na własnych błędach.

Każdy ma prawo popełniać błędy, a zwłaszcza na etapie nauki. A wiesz, co jest w tym najlepsze? Że tego konkretnego błędu już nigdy więcej nie popełnisz.

Powołałam się na słowa Carol Dweck, profesor psychologii na Uniwersytecie Stanforda, która mówi, że każdy błąd przyczynia się do wzrostu synaps w mózgu, oraz że błędy nie są porażkami – są częścią procesu nauki. Autorka ta, w swojej książce *Nowa psychologia sukcesu* (Dweck, 2017), pokazuje, jak nastawienie umysłowe wpływa na nasze osiągnięcia i rozwój osobisty. Wyróżnia dwa główne sposoby myślenia: nastawienie stałe (*fixed mindset*) oraz nastawienie na rozwój (*growth mindset*), stawiając pytanie: Które z nich prowadzi do sukcesu?

Stałe nastawienie to przekonanie, że inteligencja, talent i umiejętności są wrodzone i niezmienne. Osoby z takim podejściem wierzą, że sukces zależy od naturalnych predyspozycji, a nie od wysiłku. W efekcie unikają wyzwań, obawiając się porażki, traktują krytykę jako atak na swoją wartość, łatwo się poddają oraz zazdroszczą sukcesów innym. W przeciwieństwie do nich, osoby z nastawieniem na rozwój wierzą, że zdolności można kształtować poprzez naukę, praktykę i wytrwałość. Postrzegają

wyzwania jako okazję do nauki, a porażki traktują jako część procesu rozwoju. Cechuje je otwartość na nowe doświadczenia, traktowanie błędów jako lekcji, wytrwałość w dążeniu do celu oraz inspirowanie się sukcesami innych.

Badania Carol Dweck pokazują, że osoby z nastawieniem na rozwój osiągają lepsze wyniki w szkole, pracy i sporcie. Chętniej podejmują trudne wyzwania, są bardziej zmotywowane do nauki i doskonalenia umiejętności, wykazują większą odporność psychiczną i nie boją się porażek, a także potrafią konstruktywnie przyjmować krytykę i wykorzystywać ją do samodoskonalenia. Warto przedstawić uczniom wyniki takich badań. Kluczowe jest uświadomienie im, że zdolności można rozwijać, ponieważ inteligencja i umiejętności nie są stałe, a także by postrzegać porażki jako element procesu nauki oraz podejmować wyzwania prowadzące do rozwoju.

Strategie pracy z błędem

Szczególną uwagę pragnę zwrócić na to, że należy doceniać przede wszystkim wysiłek włożony w pracę, a nie tylko same wyniki, ponieważ to proces nauki jest najważniejszy. Docenianie to jedna z kluczowych strategii pracy z błędem, obok tworzenia atmosfery akceptacji błędów i budowania środowiska, w którym uczniowie czują się swobodnie, przyznając się do nich.

Chwal zatem uczniów przede wszystkim za podejmowane wysiłki, nawet jeśli popełniają błędy. Pokazuj, że doceniasz ich chęci do nauki i rozwoju. W młodszych klasach można zachęcać uczniów do otaczania swoich błędów np. serduszkiem. Można także zastosować tzw. negocjację oceny, jeśli uczeń poprawi błędy. Używaj zielonego długopisu do zaznaczania prawidłowo wykonanej części pracy – to pozytywny impuls.

Omów z uczniami popełnione błędy, wyjaśnij ich przyczyny i wspólnie poszukajcie sposobów na ich unikanie w przyszłości. Zbadaj, co doprowadziło do ich popełnienia – czy wynikały z braku wiedzy, nieuwagi, trudności w zrozumieniu materiału czy innych problemów. W celu wsparcia procesu poprawiania błędów skutecznie udzielaj informacji zwrotnej. Możesz dzielić się z uczniami przykładami swoich błędów i pokazywać, jak je korygowałaś/-eś.

Na lekcjach organizuj pracę w grupach, gdzie uczniowie analizują błędy, rozwiązują nierozwiązane problemy, identyfikują popełnione błędy, uzasadniają swoje rozumowanie i dyskutują nad poprawnym rozwiązaniem. Analizuj również różne błędy na forum klasy.

Oto przykład takiej analizy:

Nauczyciel: Spójrzmy na ten przykład. Masz wyrazić $(a + b)^2$ w postaci rozwiniętej. Jak to zapisałeś?
Uczeń: Napisałem, że $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
Nauczyciel: Dobrze, że próbujesz! Ale zastanówmy się, co oznacza to wyrażenie. Jak inaczej możemy zapisać $(a + b)^2$?
Uczeń: Nie wiem.
Nauczyciel: Jak inaczej zapisałbyś a^2?
Uczeń: aa.
Nauczyciel: Dobrze, to spróbuj wyrażenie $(a + b)^{2\cdot}$
Uczeń: Hmm… to znaczy, że muszę podnieść do kwadratu sumę a + b.
Nauczyciel: Dokładnie tak! Jak możemy to zapisać jako iloczyn?

Uczeń: Chyba… $(a + b) \cdot (a + b)$.
Nauczyciel: Tak! A teraz rozpiszmy to krok po kroku, stosując rozdzielność mnożenia. Pomnóżmy każdy składnik pierwszego nawiasu przez każdy składnik drugiego nawiasu.
Uczeń: Dobrze. …
Nauczyciel: Świetnie! Teraz uprośćmy to. Co otrzymujesz?
Uczeń: $a^2 + ab + ab + b^2$.
Nauczyciel: Właśnie tak! A jak można jeszcze zapisać ab + ab?
Uczeń: To jest 2ab!
Nauczyciel: Brawo! Jak więc wygląda pełne rozwinięcie wzoru?
Uczeń: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Nauczyciel: Świetnie! Widzisz teraz, gdzie był twój błąd?
Uczeń: Tak! Zapomniałem o 2ab, bo myślałem, że wystarczy podnieść do kwadratu każdą liczbę osobno.
Nauczyciel: Sprawdźmy teraz, co się stanie, gdy podstawimy konkretne liczby. Załóżmy, że a = 3, a b = 2. Obliczmy lewą stronę równania: $(3 + 2)^2$.
Uczeń: To będzie $5^2 = 25$.
Nauczyciel: Świetnie! Teraz podstawmy te same liczby do twojej pierwszej, błędnej wersji, gdzie pominąłeś 2ab. Ile wynosi $3^2 + 2^2$?
Uczeń: 9 + 4 = 13. Ups, to nie pasuje do 25…
Nauczyciel: Właśnie! A teraz policzmy poprawnie, według wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. A więc: $3^2 + 2 (3 \cdot 2) + 2^2$.
Uczeń: 9 + 12 + 4 = 25. Teraz się zgadza!
Nauczyciel: Dokładnie tak! Widzisz, jak ważne jest sprawdzanie wzorów na liczbach? Gdyby twoje pierwsze rozwiązanie było poprawne, wynik powinien być zawsze taki sam.
Uczeń: Tak! Teraz wiem, że muszę uważać i nie zapominać o 2ab.
Nauczyciel: Świetnie! A teraz spróbuj sam sprawdzić $(4 + 1)^2$, żeby upewnić się, że dobrze rozumiesz.

Można zaobserwować, że podejście do błędu w szkole zmienia się, choć proces ten nie jest łatwy. Ważne jest stopniowe oswajanie uczniów z emocjami towarzyszącymi ich popełnianiu i pokazywanie, że są one naturalnym elementem procesu nauki. Kultura błędu to wartość, nad którą powinniśmy pracować wspólnie – nie tylko na lekcjach matematyki, ale również w ramach innych przedmiotów. Spójna komunikacja nauczycieli może pomóc w kształtowaniu takiego podejścia. Warto np. przeprowadzić na godzinie wychowawczej dyskusję o korzyściach płynących z popełniania błędów oraz uczenia się na nich, zwłaszcza na błędach innych. Nawet w codziennym życiu korzystamy z cudzych błędów, np. wybierając się w podróż pytamy: Jakie błędy najczęściej popełniają inni – na przykład turyści podczas wyjazdów do ciepłych krajów czy na narty? Łatwiej nam się uczyć na cudzych błędach niż zdobywać wiedzę w inny sposób. Tak samo powinno to działać na lekcjach matematyki – błędy mogą być cenną lekcją. Pokażmy uczniom błędy najczęściej popełniane na egzaminach zewnętrznych i omówmy je szczegółowo.

Podsumowując, błędy to nieodłączny element naszego życia i procesu nauki. Choć często są postrzegane jako coś negatywnego, w rzeczywistości mogą pełnić kluczową rolę w naszym rozwoju osobistym i społecznym. Akceptacja błędów jako naturalnej części procesu nauki i wprowadzenie kultury, która pozwala na ich swobodne popełnianie i analizowanie, może przynieść korzyści zarówno w edukacji, jak i w życiu codziennym.

Autor:
Bernard Bazylewicz, nauczyciel-konsultant matematyki
Powiatowe Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Poradnictwa Psychologiczno-Pedagogicznego w Górze

Strategie rozwiązywania zadań otwartych z matematyki

Przygotowując uczniów do pierwszego poważnego egzaminu w ich życiu, czyli egzaminu ósmoklasisty, w tym przypadku z matematyki, często spotykamy się z dużymi trudnościami podczas rozwiązywania przez nich zadań otwartych. Wiem z praktyki, że uczniowie niechętnie rozwiązują zadania otwarte, a duży odsetek zdających pozostawia takie zadania, nie podejmując choćby próby ich rozwiązania.

Przyczyn takiego podejścia jest kilka, ale chyba najczęściej wynikają one z obawy przed podjęciem trudu rozwiązania i braku wiary we własne umiejętności.

Aby temu przeciwdziałać, można skorzystać z poniższych podpowiedzi zapisanych w formie prostej instrukcji, którą nauczyciele matematyki mogą wykorzystywać na lekcjach w klasie siódmej, kiedy uczniowie opanują już metody rozwiązywania równań, a ponownie w klasie ósmej – przed powtórkami mającymi na celu przygotowanie ich do egzaminu ósmoklasisty z matematyki.

Niniejszą instrukcję można przygotować w formie prezentacji i realizować z uczniami na lekcjach matematyki. W praktyce instrukcję zdążymy omówić w trakcie jednej lekcji.

Strategie rozwiązywania zadań otwartych z matematyki

1. Od czego zacząć? Rozpocznij od przeczytania treści zadania. Istotne jest dokładne jej zrozumienie.

2. Co dalej? Po raz drugi dokładnie odczytaj treść zadania i postaraj się ją zrozumieć.

3. Jak kontynuujemy? Po raz trzeci zapoznaj się z treścią zadania, spróbuj ją pojąć oraz zacznij myśleć nad sposobem rozwiązania.

4. Jak rozpocząć rozwiązywanie? Najpierw wyodrębnij dane poprzez zidentyfikowanie wszystkich podanych liczb, wielkości i zależności między nimi. Następnie sformułuj pytanie/-a, jasno określając, jakie są ogólne wymagania.

5. Jak sobie pomóc? Podejmuj działanie, tj. pisz lub rysuj. Nie rozwiążesz zadania, pracując wyłącznie w myślach. Stosuj wizualizację, gdyż często rysunek pomaga lepiej zrozumieć treść zadania i zobaczyć zależności między różnymi elementami. Do zadań z geometrii rysunek jest niemal niezbędny.

6. Trudne zadanie dziel na etapy (części). Następuje rozwiązuj je krok po kroku.

7. Rozwiązując zadanie, zastosuj odpowiednie wzory i twierdzenia. Na podstawie zrozumienia treści zadania, wybierz odpowiednie wzory, twierdzenia lub definicje.

8. Sprawdź jednostki. Upewnij się, że wszystkie wielkości są wyrażone w tych samych jednostkach.

9. Uporządkuj. Dla trudniejszych zadań – uporządkuj informacje i zapisz dane lub przeprowadź i zapisz analizę.

10. Ułóż równanie lub układ równań. Przetłumacz treść zadania na język matematyczny, tworząc równanie lub układ równań.

11. Rozwiąż zadanie, stosując odpowiednie metody rozwiązywania równań (np. przenoszenie liczb lub niewiadomych ze zmienionym znakiem, dzielenie lub mnożenie równania przez liczbę różną od zera).

Ważne! Rozwiązanie zadania to nie wszystko.

Rozwiązanie zadania = 50% sukcesu.

Zredagowanie zadania = 50% sukcesu.

Przy redagowaniu zadania używaj równoważników zdań, nie przepisuj go w całości do danych lub analizy, używaj odpowiednich określeń (np. liczba, wiek, masa, długość, czas, ilość, pojemność czy objętość).

Przykłady: *x = chłopcy* – określenie jest mało precyzyjne, ale

liczba chłopców = x – sformułowanie czytelne i prawidłowe,

wiek siostry = x – prawidłowo, ale nie *siostra = x.*

12. Zweryfikuj rezultat. Rozwiązałaś/-eś zadanie? Sprawdź wynik.

Zinterpretuj wynik, sprawdzając, czy ma on sens w kontekście zadania i/lub w życiu codziennym, w praktyce.

13. Wstaw wynik do równania, sprawdzając, czy spełnia on warunki zadania.

14. Podsumuj rozwiązanie zadania. Opisz tok rozwiązania. Zapisz odpowiednie równania i potrzebne obliczenia.

15. Odpowiedź. Jasno sformułuj i podaj ostateczną odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu.

Dodatkowe wskazówki w trakcie rozwiązywania zadania:

• Nie bój się pomyłek: pomyłki są naturalną częścią procesu uczenia się.

• Bądź cierpliwa/-y: rozwiązywanie niektórych zadań może wymagać czasu i wysiłku.

• Współpracuj z innymi: dyskusja z koleżankami i kolegami lub nauczycielem może pomóc ci znaleźć nowe sposoby myślenia o problemie (nie dotyczy egzaminu).

Przykład 1.

Oblicz czas przejazdu kolarza jadącego z prędkością $36\frac{\text{km}}{\text{h}}$, na wybranym odcinku trasy 1200 m. Podaj czas w minutach.

I sposób rozwiązania:

Dane:

$s = 1200\ m = 1{,}2\ km$ $\qquad$ $v = \frac{s}{t} /\cdot t$

$v = 36\ \frac{km}{h}$ $\qquad$ $v \cdot t = s /: v$

$t = ?$ $\qquad$ $t = \frac{s}{v}$

$$t = \frac{1{,}2}{36} = \frac{12}{360}\,h = \frac{1}{30}\,h = \frac{1}{30} \cdot 60\ min. = 2\ min.$$

Odpowiedź: Czas przejazdu kolarza wynosił 2 minuty.

II sposób rozwiązania:

Dane:

$s = 1200m$ $\qquad v = \frac{s}{t} /\cdot t$

$v = 36\frac{km}{h} = 10\frac{m}{s}$ $\qquad v \cdot t = s /: v$

$t = ?$ $\qquad t = \frac{s}{v}$

$$t = \frac{1200}{10} = 120\ s = 2\ min.$$

Odpowiedź: Czas przejazdu kolarza wynosił 2 minuty.

Przykład 2.

Janek zebrał pewną liczbę grzybów, Piotr 20% więcej od niego, a Krzyś liczbę równą $\frac{1}{3}$ grzybów zebranych przez obu kolegów razem. Ile zebrał każdy z nich, jeśli wszyscy razem zebrali 88 grzybów?

Analiza:

Liczba grzybów Janka = x

Liczba grzybów Piotra = $120\%x = 1{,}2x = \frac{6}{5}x$

Liczba grzybów Krzysia = $\frac{1}{3} \cdot (x + 1{,}2x) = \frac{2{,}2}{3}x = \frac{22}{30}x = \frac{11}{15}x$

$$x + \frac{6}{5}x + \frac{11}{15}x = 88 /\cdot 15$$

$$15x + 18x + 11x = 1320$$

$$44x = 1320 /: 44$$

$$x = \frac{1320}{44} = \frac{660}{22} = \frac{60}{2} = 30$$

$x = 30$ $\qquad \frac{6}{5}x = 36$ $\qquad \frac{11}{15}x = 22$

Odpowiedź: Janek zebrał 30 grzybów, Piotr 36, a Krzyś 22.

Przykład 3.

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie znajduje się odcinek, którego jednym z końców jest punkt $K(-8, 5)$. Środkiem tego odcinka jest punkt $S(2, -7)$. Drugi koniec tego odcinka oznaczono punktem L. Znajdź współrzędne punktu L.

I sposób rozwiązania:

Oznaczmy współrzędne punktu $L\left(x_{L,}y_{L}\right)$, wtedy:

$$\frac{-8+x_L}{2}=2/\cdot 2 \qquad \frac{5+y_L}{2}=-7/\cdot 2$$
$$-8+x_L=4 \qquad 5+y_L=-14$$
$$x_L=4+8 \qquad y_L=-14-5$$
$$x_L=12 \qquad y_L=-19$$

Odpowiedź: Punkt L ma współrzędne $(12,-19)$.

II sposób rozwiązania:

Współrzędna odcięta środka odcinka jest średnią arytmetyczną dwóch współrzędnych odciętych jego końców, dlatego suma współrzędnych odciętych wynosi $2\cdot 2=4$.

Jeśli suma współrzędnych odciętych wynosi 4, a jedna z nich jest równa -8, wynika z tego, że odcięta punktu S musi wynosić 12, bo $-8+12=4$.

Współrzędna rzędna y środka odcinka jest średnią arytmetyczną dwóch współrzędnych rzędnych jego końców. Dlatego suma współrzędnych rzędnych wynosi $2\cdot(-7)=-14$.

Jeśli suma współrzędnych rzędnych wynosi -14, a jedna z nich jest równa 5, to wynika z tego, że rzędna punktu S musi wynosić -19, bo $5+(-19)=-14$.

Odpowiedź: Punkt L ma współrzędne $(12,-19)$.

Przykład 4.

W urnie znajduje się 5 kul czerwonych, 6 zielonych i 8 niebieskich.

a) *Ile co najmniej kul trzeba wyjąć z urny bez ich oglądania, aby wśród wylosowanych co najmniej jedna była zielona?*

a) *Ile kul niebieskich trzeba dołożyć do urny, aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej wynosiło 25%?*

I sposób rozwiązania:

a) Przeprowadzamy następujące rozumowanie. Załóżmy, że widzimy wszystkie kule. Jeśli wyjmiemy wszystkie czerwone kule, to kolejna wybrana będzie zielona lub niebieska. Jeśli teraz wyjmiemy wszystkie niebieskie, to zostaną tylko zielone. Już wyjęliśmy 13 kul. Czternasta, piętnasta i kolejne kule będą na pewno zielone. Dlatego trzeba wyjąć co najmniej 14 kul, aby co najmniej jedna była zielona. Odpowiedź: Należy wyjąć co najmniej 14 kul.

a) Aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej wynosiło 25%, do urny należy dołożyć jedną kulę niebieską.

I sposób rozwiązania:

Wiemy, że: $25\% = \frac{1}{4}$.

Oznaczmy x = liczba dodanych kul,

$x+8=$ liczba kul niebieskich, $x+19=$ liczba wszystkich kul.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej $= \frac{\text{liczba kul czerwonych}}{\text{liczba wszystkich kul}}$

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{x+19}$$
$$1 \cdot (x+19) = 4 \cdot 5$$
$$x + 19 = 20$$
$$x = 20 - 19$$
$$x = 1$$

Opowiedź: Aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej wynosiło 25%, należy dołożyć 1 kulę niebieską.

II sposób rozwiązania:

$25\% = \frac{1}{4}$

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej $= \frac{\text{liczba kul czerwonych}}{\text{liczba wszystkich kul}}$

$\frac{1}{4} = \frac{5}{?}$

Aby ułamki były równe w miejscu znaku zapytania należy wstawić 20. Ponieważ w urnie było pierwotnie 19 kul, należy dołożyć jeszcze jedną kulę. Może to być kula niebieska.

Odpowiedź: Aby prawdopodobieństwo wylosowania kuli czerwonej wynosiło 25%, należy dołożyć 1 kulę niebieską.

Nie wiesz jak rozwiązać zadanie? Co powinnaś/powinieneś robisz?

1. Rozważ przypadki szczególne. Czasami rozpatrzenie prostych przypadków może naprowadzić na rozwiązanie ogólne.
2. Prowadź rozumowanie krok po kroku. Każdy krok rozwiązania powinien być logicznie uzasadniony.
3. Szukaj analogii. Porównaj dane zadanie do podobnych zadań, które już rozwiązałeś.
4. Zastosuj metodę prób i błędów. Jeśli nie masz innego pomysłu, możesz spróbować różnych rozwiązań.

Ważne: Nie zostawiaj zadania bez próby rozwiązania!

Strategia na egzaminie: Gdy nie potrafisz rozwiązać wybranego zadania, rozwiązuj kolejne z nich, a następnie wróć do trudnego dla Ciebie zadania.

Pamiętaj! Trening czyni mistrza.

Pamiętaj! Rozwiązywanie zadań otwartych wymaga praktyki.
Im więcej zadań rozwiążesz, tym większą wprawę będziesz miał/a w stosowaniu różnych strategii.

Gdzie szukać zadań, aby ćwiczyć?

Z pomocą przychodzi strona internetowa Centralnej Komisji Egzaminacyjnej[1]. Znajdziesz tam informacje o egzaminie ósmoklasisty, egzaminie maturalnym, egzaminach zawodowych i egzaminie eksternistycznym.

1 https://cke.gov.pl; arkusze z lat poprzednich znajdziemy na stronie: https://arkusze.pl/. [dostęp: 19.01.2025]

Autorka:
Agnieszka Ogiegło, doradca metodyczny z matematyki
Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu – Filia w Wałbrzychu

Narzędziownik nauczyciela matematyki w klasach IV - VIII

Współczesna edukacja stawia przed nauczycielami wiele wyzwań, z których jednym z kluczowych jest dostosowanie metod nauczania do cyfrowej rzeczywistości, w jakiej dorastają uczniowie. Technologie informacyjno-komunikacyjne (TIK) zyskały status nieodłącznego elementu efektywnej edukacji, a ich odpowiednie zastosowanie w nauczaniu matematyki może znacząco podnieść poziom kompetencji matematycznych wśród uczniów.

Wykorzystanie narzędzi TIK w klasach IV – VIII pozwala nie tylko wzbogacić tradycyjny proces dydaktyczny, ale również czyni naukę bardziej atrakcyjną, angażującą i dostosowaną do indywidualnych potrzeb uczniów. Dzięki aplikacjom edukacyjnym, interaktywnym symulacjom czy platformom e-learningowym uczniowie mają okazję eksplorować trudne zagadnienia matematyczne w praktyczny sposób, co sprzyja lepszemu zrozumieniu i utrwaleniu wiedzy.

W niniejszym artykule przedstawiono narzędziownik nauczyciela matematyki, który obejmuje różnorodne rozwiązania TIK wspierające rozwój kompetencji matematycznych. Ponadto omówiono, w jaki sposób te technologie mogą zwiększyć efektywność nauczania, rozwijać logiczne myślenie oraz przygotować uczniów do zmieniających się wymagań współczesnego świata.

Przykładowe aplikacje wspierające nauczanie matematyki w klasach IV – VIII

1. Math Learning Center Apps[1]

Math Learning Center Apps to zestaw bezpłatnych aplikacji edukacyjnych opracowanych przez The Math Learning Center, które wspierają nauczanie matematyki w sposób wizualny, interaktywny i angażujący. Narzędzia te są dostępne w przeglądarce internetowej oraz jako aplikacje na urządzenia mobilne (iOS i Android). Ich głównym celem jest pomoc uczniom w zrozumieniu kluczowych pojęć matematycznych poprzez eksplorację, manipulację i wizualizację zagadnień.

Przykładowe aplikacje z zestawu:

- **Number Frames**

Ułatwia naukę operacji matematycznych, takich jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie dzięki wizualnym reprezentacjom w postaci ramek z liczbami. Pomaga uczniom zrozumieć pojęcia liczbowe i operacje na liczbach w sposób intuicyjny.

- **Number Line**

Ta aplikacja wspiera naukę liczb, działań arytmetycznych oraz koncepcji, takich jak liczby ujemne czy ułamki. Uczniowie mogą poruszać się po osi liczbowej, manipulować jej zakresem i obserwować zależności między liczbami.

- **Geoboard**

Cyfrowa wersja tradycyjnej tablicy z gumkami, używana do nauki geometrii. Uczniowie mogą

1 https://www.mathlearningcenter.org/apps

tworzyć figury geometryczne, badać zależności między długością, obwodem i powierzchnią oraz eksperymentować z symetrią i kątami.

- **Pattern Shapes**

Narzędzie wspiera naukę geometrii, symetrii i wzorów poprzez manipulację kolorowymi kształtami. Uczniowie mogą tworzyć własne wzory, układać mozaiki i odkrywać właściwości figur geometrycznych.

- **Fractions**

Aplikacja wizualizuje ułamki w postaci diagramów i osi liczbowych. Uczniowie mogą dodawać, odejmować, porównywać oraz manipulować ułamkami, co pozwala na lepsze zrozumienie ich właściwości i zastosowań.

- **Money Pieces**

Narzędzie pomaga uczniom zrozumieć koncepcję pieniędzy, wartości nominalnych oraz wykonywania operacji na liczbach za pomocą wirtualnych monet i banknotów. Przydatne w rozwijaniu umiejętności praktycznych związanych z matematyką finansową.

- **Math Clock**

Aplikacja ułatwia naukę odczytywania czasu oraz rozumienia zależności między minutami, godzinami i kątem obrotu wskazówek zegara. Uczniowie mogą manipulować zegarem w sposób interaktywny, co wspiera ich intuicyjne rozumienie czasu.

- **Number Pieces**

Narzędzie do pracy z liczbami i wartościami dziesiętnymi w kontekście systemu dziesiętnego. Uczniowie mogą manipulować blokami reprezentującymi jedności, dziesiątki i setki, aby wykonywać operacje matematyczne i zrozumieć zależności między miejscami dziesiętnymi.

Dlaczego warto korzystać?

- **Bezpłatne:** Wszystkie aplikacje są bezpłatne i dostępne zarówno online, jak i offline.
- **Prostota:** Intuicyjny interfejs umożliwia szybkie wdrożenie się w działanie aplikacji.
- **Elastyczność:** Aplikacje mogą być używane w nauczaniu w klasie, pracy domowej czy samodzielnej nauce uczniów.
- **Wsparcie wizualne:** Pomagają w lepszym zrozumieniu abstrakcyjnych pojęć matematycznych poprzez wizualizację i manipulację.

Podsumowanie

Math Learning Center Apps to wszechstronne narzędzia, które wzbogacają proces nauczania matematyki w klasach IV – VIII, wspierając rozwój logicznego myślenia, rozumienia pojęć i umiejętności analitycznych.

2. Visnos Interactive Mathematics[2]

Visnos Interactive Mathematics to zbiór bezpłatnych, interaktywnych narzędzi online, zaprojektowanych z myślą o nauczaniu i wizualizacji kluczowych zagadnień matematycznych. Narzędzia te doskonale nadają się do użytku w klasach IV – VIII, wspierając nauczycieli i uczniów w eksploracji matematyki w sposób dynamiczny i angażujący. Platforma oferuje symulacje i wizualizacje, które pomagają lepiej zrozumieć pojęcia abstrakcyjne, takie jak geometria, liczby czy prawdopodobieństwo.

2 https://wwwvisnos.com/demos

Najważniejsze narzędzia dostępne na platformie Visnos:

- **Interactive Clock**

Interaktywny zegar pozwala uczniom eksperymentować z odczytywaniem czasu. Zegar analogowy można dostosować, aby wyświetlał godziny, minuty i sekundy. Narzędzie pomaga w nauce zależności między czasem a kątem obrotu wskazówek oraz w rozwiązywaniu problemów związanych z dodawaniem lub odejmowaniem czasu.

- **Tessellation Creator**

Umożliwia uczniom tworzenie wzorów złożonych z powtarzających się figur geometrycznych. Narzędzie pomaga zrozumieć pojęcia symetrii, transformacji geometrycznych oraz zasad tworzenia mozaik. Jest szczególnie przydatne w nauce geometrii i sztuki matematycznej.

- **Polygon Explorer**

Pozwala na eksplorację właściwości wielokątów. Uczniowie mogą manipulować liczbą boków, długościami oraz kątami, aby badać, jak te elementy wpływają na obwód i pole figury. Narzędzie jest idealne do nauki o zależnościach geometrycznych i konstrukcjach wielokątów.

- **Fraction Calculator**

Wizualizuje ułamki w formie interaktywnych diagramów. Uczniowie mogą dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki, a narzędzie automatycznie przedstawia wyniki w postaci wizualnej. Dzięki temu uczniowie lepiej rozumieją operacje na ułamkach i ich zastosowania.

- **Spirograph**

Umożliwia tworzenie złożonych wzorów za pomocą narzędzia przypominającego klasyczny spirograf. Poza aspektami artystycznymi uczniowie mogą poznawać koncepcje związane z geometrią, okręgami i ich równaniami.

- **Probability Simulator**

Narzędzie do badania prawdopodobieństwa na przykładzie symulacji rzutu monetą, kostką lub losowania kart. Uczniowie mogą przeprowadzać eksperymenty, zmieniać warunki i analizować wyniki w formie wykresów. Symulacja wspiera naukę statystyki i rachunku prawdopodobieństwa.

- **Vector Explorer**

Pomaga w nauce wektorów poprzez wizualizację ich dodawania, odejmowania oraz rozkładu na składowe. Uczniowie mogą manipulować wielkością i kierunkiem wektorów, co ułatwia zrozumienie podstawowych pojęć związanych z geometrią analityczną.

- **Number Explorer**

Narzędzie przeznaczone do badania właściwości liczb, które wspiera rozwój umiejętności pracy z liczbami i rozwiązywania problemów. Uczniowie mogą analizować czynniki, liczby pierwsze, wielokrotności i inne właściwości numeryczne.

Kluczowe zalety narzędzi Visnos:

- **Wizualizacja pojęć matematycznych:** Narzędzia pomagają uczniom zobaczyć i zrozumieć matematyczne koncepcje w sposób praktyczny i intuicyjny.
- **Dostępność:** Platforma jest bezpłatna i działa w przeglądarce, bez konieczności instalacji dodatkowego oprogramowania.
- **Interaktywność:** Narzędzia zachęcają uczniów do eksperymentowania i samodzielnego odkrywania zasad matematyki.

- **Wsparcie dla nauczycieli:** Każde narzędzie można łatwo włączyć w tok lekcji, aby zilustrować omawiane zagadnienia.

Podsumowanie

Visnos Interactive Mathematics to wszechstronny zbiór narzędzi, który wzbogaca proces nauczania matematyki, czyniąc go bardziej atrakcyjnym i efektywnym. Dzięki temu platforma jest cenionym wsparciem zarówno dla nauczycieli, jak i uczniów.

3. Didax Virtual Manipulatives[3]

Didax Virtual Manipulatives to bezpłatna, interaktywna platforma edukacyjna stworzona z myślą o wspieraniu nauki matematyki poprzez wizualizację i manipulację obiektami. Narzędzie oferuje szeroki zestaw wirtualnych manipulatorów, które pomagają uczniom w zrozumieniu kluczowych pojęć matematycznych, takich jak operacje arytmetyczne, geometria, ułamki czy wartości dziesiętne. Platforma jest dostępna w przeglądarce internetowej, co czyni ją łatwo dostępną zarówno w sali lekcyjnej, jak i podczas nauki zdalnej.

Funkcjonalności i dostępne manipulatory:

- ✓ **Base Ten Blocks (Bloki dziesiętne)**
  - ◊ Umożliwiają wizualizację systemu dziesiętnego i operacji takich jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie oraz dzielenie liczb.
  - ◊ Pomagają w zrozumieniu pojęć wartości miejsca dziesiętnego (jedności, dziesiątki, setki).
- ✓ **Fraction Circles (Koła ułamkowe)**
  - ◊ Narzędzie do pracy z ułamkami, umożliwiające porównywanie, dodawanie, odejmowanie i wizualizowanie zależności między częściami całości.
  - ◊ Koła mogą być dzielone na różne liczby części, co ułatwia naukę o wspólnych mianownikach.
- ✓ **Pattern Blocks (Klocki geometryczne)**
  - ◊ Uczniowie mogą budować wzory i figury geometryczne z kolorowych kształtów, takich jak trójkąty, kwadraty czy sześciokąty.
  - ◊ Narzędzie pomaga zrozumieć pojęcia symetrii, proporcji i układu przestrzennego.
- ✓ **Two-Color Counters (Dwukolorowe liczmany)**
  - ◊ Idealne do nauki dodawania i odejmowania liczb, szczególnie w kontekście liczb całkowitych i działań na liczbach ujemnych.
  - ◊ Można ich używać również do nauki prawdopodobieństwa i rozwiązywania problemów logicznych.
- ✓ **Cuisenaire Rods (Patyczki Cuisenaire'a)**
  - ◊ Narzędzie wspierające naukę proporcji, długości i zależności liczbowych. Uczniowie mogą układać patyczki różnej długości, aby badać relacje między liczbami.
- ✓ **Number Lines (Osie liczbowe)**
  - ◊ Uczniowie mogą używać osi liczbowych do badania zależności między liczbami, w tym liczb całkowitych, ułamków i wartości dziesiętnych.
  - ◊ Narzędzie jest pomocne przy wizualizacji dodawania, odejmowania i porównywania liczb.

3 https://www.didax.com/virtual-manipulatives.html

- ✓ **Hundreds Chart (Tablica stówek)**
  - ◊ Pomaga uczniom w badaniu wzorców liczbowych, dodawaniu i odejmowaniu wielokrotności liczb oraz zrozumieniu podstaw arytmetyki.
  - ◊ Narzędzie wspiera naukę mnożenia, dzielenia i analizy zależności między liczbami.
- ✓ **Ten-Frame (Ramka dziesiętna)**
  - ◊ Doskonałe narzędzie do nauki liczenia, dodawania i odejmowania. Umożliwia reprezentowanie liczb w systemie dziesiętnym za pomocą kolorowych żetonów.
  - ◊ Ułatwia wizualizację pojęć takich jak dziesiątki, jedności i pełne dziesiątki.
- ✓ **Dice (Kostki do gry)**
  - ◊ Wirtualne kostki z możliwością wyboru liczby ścianek, co sprawdza się w nauce prawdopodobieństwa, statystyki i rozwiązywaniu problemów.
- ✓ **Spinners (Koła losujące)**
  - ◊ Narzędzie do badania prawdopodobieństwa, które umożliwia dostosowanie liczby sektorów i ich wartości.

Kluczowe cechy platformy:

- **Interaktywność**: Uczniowie mogą manipulować wirtualnymi obiektami, co sprzyja lepszemu zrozumieniu pojęć matematycznych.
- **Uniwersalność**: Narzędzia są odpowiednie zarówno dla młodszych, jak i starszych uczniów, dzięki różnorodności dostępnych manipulatorów.
- **Wsparcie dla nauczycieli**: Manipulatory mogą być używane do prezentacji zagadnień na lekcjach, a także jako materiały wspierające zadania domowe.
- **Dostępność**: Platforma działa w przeglądarkach internetowych i jest bezpłatna, co pozwala na korzystanie z niej w każdej chwili i w dowolnym miejscu.

Korzyści z wykorzystania Didax Virtual Manipulatives:

- Wspiera naukę poprzez działanie i eksperymentowanie, co szczególnie pomaga uczniom kinestetycznym i wizualnym.
- Ułatwia zrozumienie trudnych pojęć matematycznych dzięki intuicyjnej wizualizacji.
- Wzbogaca proces nauczania i uatrakcyjnia lekcje matematyki, czyniąc je bardziej angażującymi.

Podsumowanie

Didax Virtual Manipulatives to nowoczesne, dostępne i wszechstronne narzędzie, które doskonale wpisuje się w potrzeby edukacji matematycznej XXI wieku.

4. Scales[4]

Scales to interaktywne narzędzie edukacyjne dostępne na stronie ICT Games, stworzone z myślą o wsparciu nauczania matematyki w sposób wizualny i angażujący. Narzędzie pozwala uczniom eksplorować pojęcia równowagi, wartości liczbowych oraz zależności matematycznych poprzez interaktywne wykorzystanie wirtualnej wagi.

Opis działania narzędzia

Scales przedstawia uczniom wirtualną wagę z dwiema szalkami. Użytkownicy mogą dodawać na szalki różne liczby w postaci kolorowych bloczków, które symbolizują wartości. Celem jest osiągnięcie równowagi poprzez zrozumienie relacji między liczbami i operacjami matematycznymi.

4 https://ictgames.com/mobilePage/scales/index.html

Kluczowe funkcje narzędzia:

1. **Eksploracja dodawania i odejmowania**
   - ◊ Uczniowie mogą umieszczać bloczki z liczbami na obu szalkach, aby odkrywać zależności między wartościami.
   - ◊ Narzędzie pozwala zrozumieć, jak równoważenie działa w przypadku dodawania lub odejmowania liczb.
2. **Równania matematyczne**
   - ◊ Waga działa jak wizualne wsparcie dla rozwiązywania równań matematycznych.
   - ◊ Uczniowie mogą eksperymentować, aby znaleźć brakującą wartość, która utrzyma równowagę, co jest świetnym wprowadzeniem do równań z jedną niewiadomą.
3. **Dynamiczne wizualizacje**
   - ◊ Kolorowe bloczki i animacje pomagają uczniom zobaczyć, jak zmienia się równowaga w zależności od liczby i rozmieszczenia bloczków.
   - ◊ Dzięki temu pojęcia abstrakcyjne stają się bardziej przystępne i łatwiejsze do zrozumienia.
4. **Elastyczność w działaniu**
   - ◊ Narzędzie pozwala na różne konfiguracje, umożliwiając pracę zarówno z małymi liczbami, jak i bardziej złożonymi operacjami.
   - ◊ Idealne do nauczania podstawowych pojęć liczbowych oraz wprowadzania bardziej zaawansowanych zagadnień, takich jak równania algebraiczne.

Zastosowanie w nauczaniu matematyki:

- **Dodawanie i odejmowanie liczb:** Uczniowie mogą praktykować proste operacje, obserwując, jak zmienia się równowaga na wadze.
- **Zrozumienie równania:** Waga wprowadza intuicyjne podejście do rozwiązywania równań, co może być szczególnie pomocne dla uczniów zaczynających naukę algebry.
- **Rozwijanie logicznego myślenia:** Eksperymentowanie z wagą uczy myślenia przyczynowo-skutkowego oraz przewidywania wyników działań.

Zalety korzystania z ICT Games: Scales

- **Interaktywność:** Uczniowie mogą manipulować bloczkami i obserwować wyniki swoich działań w czasie rzeczywistym.
- **Przystępność:** Narzędzie jest bezpłatne i dostępne w przeglądarce, bez potrzeby instalowania dodatkowego oprogramowania.
- **Przyjazny interfejs:** Prostota obsługi sprawia, że narzędzie jest odpowiednie dla uczniów w młodszych klasach oraz tych, którzy potrzebują wizualnego wsparcia w nauce matematyki.
- **Wszechstronność:** Może być używane zarówno podczas lekcji w klasie, jak i do samodzielnej nauki w domu.

Podsumowanie

ICT Games: Scales to świetne narzędzie do nauki matematyki, które łączy interaktywność z praktycznym zastosowaniem pojęć matematycznych. Dzięki niemu uczniowie mogą w atrakcyjny sposób zrozumieć abstrakcyjne idee równowagi, równań i relacji liczbowych. To proste, ale niezwykle efektywne narzędzie, które wspiera rozwój umiejętności matematycznych na różnych poziomach zaawansowania.

Każde z tych narzędzi może być cennym wsparciem w pracy nauczyciela matematyki, pomagając uczniom zrozumieć trudne zagadnienia, rozwijać umiejętności analityczne i przygotować się do wyzwań współczesnego świata.

5. Toy Theater[5]

Toy Theater to edukacyjna platforma online, która oferuje bezpłatne interaktywne narzędzia wspierające naukę matematyki. Sekcja **Virtual Manipulatives** skupia się na wirtualnych manipulatorach – narzędziach, które pomagają uczniom zrozumieć kluczowe zagadnienia matematyczne poprzez manipulację wizualnymi obiektami. Te interaktywne narzędzia są szczególnie przydatne w nauczaniu w klasach IV – VIII, a także w pracy z młodszymi dziećmi.

Opis sekcji Virtual Manipulatives

Strona **Toy Theater: Virtual Manipulatives** oferuje różnorodne zasoby, które pomagają nauczycielom wprowadzać abstrakcyjne pojęcia matematyczne w sposób zrozumiały i angażujący dla uczniów. Manipulatory są dostępne bezpłatnie i działają w przeglądarkach internetowych, co czyni je łatwymi w użyciu zarówno w klasie, jak i podczas nauki zdalnej.

Kluczowe narzędzia dostępne w Virtual Manipulatives:

- ✓ **Base Ten Blocks (Bloki dziesiętne)**
  - ◊ Narzędzie do nauki wartości dziesiętnej i systemu pozycyjnego.
  - ◊ Uczniowie mogą manipulować jednostkami, dziesiątkami, setkami i tysiącami, co ułatwia wizualizację dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia.
- ✓ **Fraction Bars (Paski ułamkowe)**
  - ◊ Pomoc w nauce ułamków poprzez ich wizualizację.
  - ◊ Uczniowie mogą porównywać ułamki, dodawać je i odejmować, a także zrozumieć pojęcie wspólnego mianownika.
- ✓ **Geoboard**
  - ◊ Wirtualna tablica, na której uczniowie mogą tworzyć figury geometryczne za pomocą „gumek”.
  - ◊ Idealne do nauki o obwodzie, polu, symetrii i kształtach geometrycznych.
- ✓ **Number Line (Oś liczbowa)**
  - ◊ Interaktywna oś liczbowa, na której uczniowie mogą wizualizować liczby całkowite, ułamki i liczby dziesiętne.
  - ◊ Wspiera naukę dodawania, odejmowania oraz porównywania wartości liczbowych.
- ✓ **Pattern Blocks (Klocki geometryczne)**
  - ◊ Kolorowe kształty geometryczne, które uczniowie mogą łączyć w celu tworzenia wzorów lub badania zależności geometrycznych.
  - ◊ Narzędzie rozwija umiejętności związane z symetrią, układem przestrzennym i proporcjami.
- ✓ **Tangrams (Układanki)**
  - ◊ Klasyczne narzędzie do układania obrazów z geometrycznych kształtów.
  - ◊ Pomaga rozwijać umiejętności wizualno-przestrzenne i uczy rozwiązywania problemów.
- ✓ **Place Value Disks (Dyski miejsc dziesiętnych)**

5 https://toytheater.com/category/teacher-tools/virtual-manipulatives/

◊ Wizualizują wartości miejsc dziesiętnych w systemie dziesiętnym.

◊ Ułatwiają zrozumienie operacji matematycznych, takich jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb wielocyfrowych.

✓ **Spinners (Koła losujące)**

◊ Narzędzie do nauki prawdopodobieństwa. Uczniowie mogą eksperymentować z różnymi wartościami na kole i analizować wyniki.

✓ **Hundreds Chart (Tablica stówek)**

◊ Umożliwia badanie wzorców liczbowych i relacji między liczbami.

◊ Przydatna w nauce dodawania, odejmowania oraz mnożenia.

✓ **Two-Color Counters (Dwukolorowe liczmany)**

◊ Pomocne w nauce dodawania i odejmowania, szczególnie z liczbami ujemnymi.

◊ Można je wykorzystać także w nauce prawdopodobieństwa i logiki matematycznej.

Zalety korzystania z Toy Theater: Virtual Manipulatives

- **Dostępność**: Wszystkie narzędzia są bezpłatne i działają bez potrzeby instalacji oprogramowania.
- **Wszechstronność**: Manipulatory można dostosować do różnych poziomów zaawansowania i potrzeb uczniów.
- **Interaktywność**: Uczniowie mogą aktywnie eksperymentować z manipulatorami, co sprzyja lepszemu zrozumieniu pojęć matematycznych.
- **Estetyka i prostota**: Narzędzia mają przyjazny interfejs i kolorową, atrakcyjną grafikę, która zachęca uczniów do nauki.
- **Zastosowanie w nauczaniu**: Idealne zarówno do pracy indywidualnej, jak i grupowej, a także do wykorzystania na tablicach interaktywnych podczas lekcji.

Podsumowanie

Toy Theater: Virtual Manipulatives to wszechstronny zestaw narzędzi edukacyjnych, które wzbogacają proces nauczania matematyki i czynią go bardziej atrakcyjnym. Dzięki interaktywnym manipulatorom uczniowie mają możliwość rozwijania umiejętności matematycznych w sposób praktyczny i angażujący. To doskonałe wsparcie dla nauczycieli, którzy chcą urozmaicić swoje lekcje i pomóc uczniom w lepszym zrozumieniu abstrakcyjnych pojęć matematycznych.

6. Bingo[6]

Gra w bingo, zwłaszcza z wykorzystaniem generatora kart dostępnego na stronie **MyFreeBingoCards**, to kreatywne i angażujące narzędzie dydaktyczne. Dzięki swojej elastyczności i prostocie bingo może być wykorzystane do wzmacniania różnych kompetencji matematycznych, rozwijania umiejętności logicznego myślenia, a także budowania motywacji do nauki.

Korzyści z wykorzystania bingo w nauczaniu matematyki

1. **Zwiększa zaangażowanie uczniów**

◊ Grywalizacja wprowadza element rywalizacji i zabawy, co sprawia, że uczniowie są bardziej zmotywowani do aktywnego uczestnictwa w lekcji.

◊ Rozwiązywanie matematycznych problemów w kontekście gry pozwala uczniom przyswajać wiedzę w sposób naturalny i mniej stresujący.

6 https://myfreebingocards.com/

2. **Utrwala pojęcia matematyczne**
   - ◊ Bingo pozwala na powtarzanie i utrwalanie kluczowych tematów matematycznych, takich jak:
     - ■ tabliczka mnożenia,
     - ■ ułamki i procenty,
     - ■ rozwiązywanie równań,
     - ■ rozpoznawanie figur geometrycznych,
     - ■ operacje na liczbach całkowitych i dziesiętnych.
3. **Wspiera różne style uczenia się**
   - ◊ Uczniowie preferujący kanał wizualny korzystają z tabel i symboli na kartach bingo.
   - ◊ Uczniowie preferujący kanał kinestetyczny mają możliwość aktywnego uczestniczenia w grze.
   - ◊ Uczniowie o silnych umiejętnościach logicznych rozwijają swoje zdolności poprzez szybkie rozwiązywanie problemów.
4. **Dostosowanie poziomu trudności**
   - ◊ Generator kart bingo umożliwia nauczycielom tworzenie gier dostosowanych do poziomu grupy. Na przykład:
     - ■ Prostsze bingo dla młodszych klas z podstawowymi działaniami,
     - ■ Bardziej zaawansowane bingo z równościami algebraicznymi czy pojęciami geometrycznymi dla starszych uczniów.
5. **Rozwija umiejętności pracy w grupie**
   - ◊ Gra w bingo sprzyja współpracy między uczniami, którzy wspólnie analizują rozwiązania lub wymieniają się spostrzeżeniami. Wspólna rywalizacja w grupie buduje umiejętność komunikacji i pracy zespołowej.
6. **Zwiększa tempo i precyzję**
   - ◊ Uczniowie muszą szybko rozwiązywać matematyczne problemy, co rozwija ich umiejętność pracy pod presją czasu.
   - ◊ Dzięki konieczności szybkiego reagowania, uczniowie stają się bardziej precyzyjni w swoich obliczeniach.
7. **Uniwersalność i prostota**
   - ◊ Bingo można wykorzystać na różne sposoby: jako ćwiczenie wprowadzające, powtórkowe czy podsumowujące.
   - ◊ Narzędzie jest elastyczne i może być używane zarówno w klasie, jak i podczas nauki zdalnej.

Jak działa MyFreeBingoCards w matematyce?

- **Personalizacja kart**: Nauczyciel może stworzyć bingo zawierające określone zagadnienia matematyczne, np. liczby pierwsze, działania arytmetyczne czy równania.
- **Interaktywność**: Generator umożliwia przygotowanie kart w wersji cyfrowej lub do druku, dzięki czemu gra może być realizowana zarówno na lekcji, jak i podczas zajęć online.
- **Losowość**: Każda karta jest unikalna, co zapobiega powtarzalności i zwiększa wyzwanie dla uczniów.

Przykładowe zastosowania bingo w matematyce

1. **Tabliczka mnożenia:**
   - ◊ Na kartach bingo umieszcza się wyniki działań, a nauczyciel podaje mnożenia, które uczniowie muszą rozwiązać, aby znaleźć odpowiednie pole.
2. **Ułamki:**
   - ◊ Na kartach znajdują się ułamki w różnych formach (proste, dziesiętne, procenty), a nauczyciel podaje pytania lub zadania konwersji.
3. **Figury geometryczne:**
   - ◊ Uczniowie muszą rozpoznać figury lub znaleźć ich cechy, takie jak liczba boków, kąty czy obwód.
4. **Równania:**
   - ◊ Uczniowie rozwiązują równania i zaznaczają wyniki na kartach bingo.
5. **Prawdopodobieństwo:**
   - ◊ Grę można wykorzystać do nauki pojęć związanych z prawdopodobieństwem, wprowadzając eksperymenty lub pytania dotyczące statystyki.

Podsumowanie

Bingo, zwłaszcza w wersji generowanej przez **MyFreeBingoCards**, to narzędzie, które w innowacyjny sposób wspiera nauczanie matematyki. Dzięki elementowi gry uczniowie uczą się z zaangażowaniem, rozwijając jednocześnie kluczowe kompetencje matematyczne. To uniwersalne rozwiązanie, które może być dostosowane do potrzeb uczniów w różnym wieku i na różnych poziomach zaawansowania.

Wnioski

Wykorzystanie narzędzi TIK (technologii informacyjno-komunikacyjnych) w nauczaniu matematyki znacząco wzbogaca proces dydaktyczny, oferując nauczycielom nowoczesne i interaktywne rozwiązania. Dzięki tym technologiom nauczyciele mogą lepiej wizualizować skomplikowane pojęcia matematyczne, personalizować materiały edukacyjne oraz angażować uczniów w naukę poprzez interaktywne i atrakcyjne formy pracy. Narzędzia takie jak GeoGebra, Desmos czy Khan Academy umożliwiają dynamiczne przedstawianie wykresów, wizualizowanie zjawisk matematycznych oraz samodzielną naukę uczniów w dowolnym tempie. Platformy do zarządzania nauczaniem, takie jak Google Classroom czy Microsoft Teams, pozwalają na sprawną organizację procesu nauczania, zadań domowych oraz komunikacji z uczniami i rodzicami.

Podsumowując, narzędzia TIK nie tylko wspierają efektywność nauczania matematyki, ale także rozwijają umiejętności cyfrowe uczniów, które są niezbędne w życiu codziennym i przyszłej karierze zawodowej. Ich odpowiednie wykorzystanie stanowi klucz do nowoczesnego, angażującego i skutecznego nauczania.

Autorzy:
Aneta Hanusiak, Paweł Kwasik, Agnieszka Niedźwiedzka, nauczyciele matematyki
Szkoła Podstawowa nr 1 im. Bolesława Prusa w Górze

Oswoić matematykę - projekt edukacyjny o charakterze metodycznym

„Nie fascynują mnie wzory, twierdzenia, bryły czy równania, ale błysk w oku mojego ucznia, który zrozumie i pozwoli oswoić się matmie."
(Małgorzata Borowik, *Oswoić matmę.* https://oswoicmatme.pl/)

Od października 2024 r. w Szkole Podstawowej nr 1 im. Bolesława Prusa w Górze realizowany jest projekt pn. **„Oswoić matematykę"**, skierowany do uczniów klas ósmych. Polega on przede wszystkim na utrwaleniu, usystematyzowaniu, uzupełnieniu i rozszerzeniu realizowanego w szkole podstawowej programu nauczania w formie regularnych i systematycznych powtórek. Zakładamy, że uczestnictwo w projekcie pomoże uczniom kształtować umiejętności logicznego myślenia, rozbudzi zainteresowania matematyczne, pokaże, że matematyka nie musi się kojarzyć z zapisanymi na kartce działaniami.

Poniżej przedstawiamy założenia dotyczące naszego projektu.

Ostrzegamy! Istnieje ryzyko polubienia matematyki 😊

Autorzy projektu: mgr Agnieszka Niedźwiedzka, mgr Aneta Hanusiak, mgr Paweł Kwasik
Osoby realizujące projekt: mgr Agnieszka Niedźwiedzka, mgr Aneta Hanusiak, mgr Paweł Kwasik – nauczyciele matematyki
Miejsce realizacji: Szkoła Podstawowa nr 1 im. B. Prusa w Górze
Adresaci projektu: uczniowie klas ósmych
Okres realizacji projektu: od października do kwietnia roku szkolnego 2024/2025

Wstęp

Matematyka od wieków nazywana jest królową nauk. Wiedza i umiejętności matematyczne pełnią w życiu codziennym bardzo istotna rolę. Matematyka to dziedzina wiedzy, której znaczenie wciąż rośnie, a użyteczność nabiera coraz większego znaczenia. Dzisiaj, w cyfrowym świecie, jej wpływ na wszystkie dziedziny życia jest widoczny gołym okiem. Umiejętności zdobywane na lekcjach matematyki umożliwiają coraz to lepsze zrozumienie otaczających nas zjawisk, właściwą interpretację docierających do nas informacji.

Nie ma możliwości uczenia się jej bez napotykania na trudności, bez poznania jej podstaw, bez konieczności podejmowania wysiłku, poszukiwania dróg rozwiązań. Rozwijanie sprawności umysłowych, posługiwanie się wiedzą w praktyce, rozwiązywanie problemów w sposób twórczy lub odtwórczy stanowi istotę przedmiotu, jakim jest matematyka.

Niniejszy projekt ma na celu aktywizację i pomoc w przełamaniu wewnętrznych oporów uczniów, jak również podniesienie ich sprawności rachunkowej oraz kształtowanie myślenia analitycznego poprzez pogłębianie umiejętności matematycznych.

Głównym celem zajęć realizowanych w ramach projektu „Oswoić matematykę" w klasach ósmych jest rozwijanie i rozbudzanie uczniowskich zainteresowań matematycznych oraz wyrównywanie u nich braków edukacyjnych związanych z nauczaniem zdalnym i usystematyzowanie zdobytej wiedzy. Podczas zajęć kształcone są umiejętności rachunkowe uczniów, rozwiązuje się typowe zadania matematyczne, a uczniowie motywowani są do samodzielności w logicznym myśleniu oraz odpowiedzialności za umiejętności swoje i swoich kolegów.

Wypowiadaniu się w języku matematyki, uzasadnianiu i dowodzeniu służą zajęcia poświęcone działaniom na ułamkach zwykłych, dziesiętnych, kolejności wykonywania działań oraz obliczaniu wartości wyrażeń arytmetycznych.

Wprowadzeniem do umiejętności czytania ze zrozumieniem, logicznego myślenia i wyciągania wniosków są zajęcia poświęcone obliczeniom procentowym na bazie obniżek i podwyżek cen z gazetek reklamowych z supermarketów oraz ćwiczenia z dodawania ułamków dziesiętnych z wykorzystaniem tych samych gazetek.

Podczas zajęć rozwijających zainteresowanie matematyką poświęcamy również czas na doskonalenie zdobytych umiejętności w rozwiązywaniu problemów matematycznych oraz nabywaniu nowych. Rozwiązujemy i omawiamy zagadnienia, które sprawiały uczniom trudności na lekcjach matematyki.

Geneza projektu

Szkoła Podstawowa nr 1 w Górze jest publiczną ośmioklasową szkołą mieszczącą się w dwóch budynkach. Do placówki uczęszcza w tym roku szkolnym 573 uczniów (281 chłopców i 292 dziewczęta) zarówno z miasta Góra, jak i pobliskich miejscowości o charakterze wiejskim.

Idea projektu powstała na skutek analizy wyników egzaminu ósmoklasisty z matematyki w naszej szkole na przestrzeni ostatnich kilku lat. Wyniki tego egzaminu były i są dość niskie, zarówno u nas w gminie, jak i w całym województwie. Postanowiliśmy więc zrobić coś, co odwróci trend spadkowy i spowoduje, że wynik kolejnego egzaminu ósmoklasisty z matematyki będzie zadowalający.

Cel główny projektu

- Utrwalenie, usystematyzowanie i uzupełnienie realizowanego w szkole podstawowej programu nauczania w formie regularnych i systematycznych powtórek,
- Przygotowanie do egzaminu ósmoklasisty,
- Wyposażenie uczniów w umiejętność wykorzystywania wiedzy matematycznej do rozwiązywania arkuszy egzaminacyjnych,
- Kształtowanie myślenia analitycznego,
- Pogłębianie umiejętności matematycznych.

Cele szczegółowe

- Powtórzenie czterech podstawowych działań w zbiorze liczb rzeczywistych,
- Powtórzenie i utrwalenie zasad działań na potęgach i pierwiastkach,
- Przygotowanie ósmoklasistów do egzaminu z matematyki,
- Przygotowane do pracy z arkuszem egzaminacyjnym,
- Pokazanie, jak analizować zadania i szukać danych umieszczonych w treści lub na rysunku, wykresie czy w tabeli,
- Czytanie i analizowanie zadań z tekstem, w tym rozwiązywanie równań I stopnia z jedną niewiadomą,
- Motywowanie do podejmowania próby rozwiązania zadań otwartych,
- Rozbudzanie ciekawości matematycznej,

- Rozwijanie umiejętności logicznego myślenia,
- Kształtowanie takich cech jak: wytrwałość, systematyczność, dokładność, inicjatywa, samodzielność,
- Wzmacnianie odporności emocjonalnej w sytuacjach trudnych, wymagających wysiłku umysłowego, pomoc w rozbudzeniu wiary we własne siły,
- Realna pomoc w zrozumieniu zasad matematyki okazana rówieśnikom (pomoc koleżeńska).

Założenia projektu

- System powtórek składa się z następujących elementów:
- Karty pracy dla uczniów zawierające zadania przeznaczone do wykonania w domu,
- Cykliczne zajęcia dodatkowe,
- Przypomnienie podstawowych praw matematycznych, np. poprzez tworzenie mapy mentalnej oraz prezentacji multimedialnych (w grupach),
- Doskonalenie umiejętności rozwiązywania zadań i zwiększenie śmiałości matematycznej poprzez rozwiązywanie testów i zadań egzaminacyjnych.

Częste wykonywanie ćwiczeń o charakterze zadań powtórzeniowych pozwala uczniom oswoić się z ich formą i poznać strategie poprawnego rozwiązywania. Opracowane zagadnienia i przygotowane zadania dla uczniów są doskonałym sposobem na kształtowanie u nich samodzielności w docieraniu do wiedzy. Całościowy system powtórek przyczynia się do dobrego przygotowania uczniów do egzaminu kończącego edukację w szkole podstawowej, pomaga im ograniczyć stres egzaminacyjny oraz ułatwia osiągnięcie sukcesu.

Harmonogram działań

Lp.	Podejmowane działania	Termin
1.	Opracowanie planu działań i dokumentacji potrzebnej do przeprowadzenia projektu.	wrzesień 2024
2.	Czynności organizacyjne: ● Wyznaczenie celów ogólnych i szczegółowych projektu, napisanie programu projektu, ● Nawiązanie współpracy ze szkołami ponadpodstawowymi w powiecie górowskim, PCDNiPP-P w Górze oraz Domem Kultury w Górze.	październik 2024
3.	Nawiązanie współpracy z uczestnikami projektu i ich rodzicami (przygotowanie pozwoleń na uczestniczenie w zajęciach dodatkowych z matematyki).	październik 2024
4.	Zatwierdzenie przez Radę Pedagogiczną programu projektu „Oswoić matematykę”.	październik 2024
5.	Przygotowanie materiałów dydaktycznych na poszczególne spotkania (testy, karty pracy, zestawy zadań).	październik 2024
6.	Przygotowanie tablicy informacyjnej dotyczącej realizowanego projektu (gablota na korytarzu).	październik 2024
7.	Przygotowanie cyklu zajęć dla uczniów klas 8: ● październik: działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych, algorytmy działań pisemnych, ● listopad: działania na potęgach i pierwiastkach, ● grudzień: wyrażenia algebraiczne, proste równania. ● styczeń – luty: praca z arkuszem egzaminacyjnym, ● marzec: rozwiązywanie i analiza zadań otwartych, ● kwiecień: praca z arkuszem egzaminacyjnym.	październik 2024 – kwiecień 2025
8.	Podsumowanie projektu.	czerwiec 2025

Metody i formy realizacji i procedury osiągania celów

Podstawowymi formami organizacyjnymi w realizacji programu jest praca zespołowa i indywidualna. Metodami stosowanymi w trakcie realizacji programu są głównie następujące metody aktywizujące:

- burza mózgów,
- eksperyment,
- rozmowa dydaktyczna.

Formy pracy stosowane w trakcie realizacji programu to głównie:

- praca w grupach,
- praca indywidualna,
- sprawdziany wiedzy,
- konsultacje.

Oczekiwane rezultaty

Poprzez zorganizowaną i systematyczną pracę:

- uczeń pogłębi, utrwali i rozszerzy wiadomości i umiejętności zdobyte na lekcjach,
- uczeń zaspokoi zainteresowania i wykształci pozytywną motywację do nauki przedmiotów ścisłych,
- uczeń umocni się w poczuciu własnej wartości i będzie bardziej odporny psychicznie na ewentualne porażki,
- uczeń łatwiej poradzi sobie ze stresem na egzaminie ósmoklasisty,
- uczeń nieśmiały przełamie strach przed aktywnym uczestnictwem w lekcjach,
- wynik egzaminu ósmoklasisty będzie zadowalający zarówno dla ucznia, jego rodziców, jak i nauczycieli matematyki.

Ewaluacja projektu

Ewaluacja działań innowacyjnych prowadzona jest przez cały okres trwania projektu. Dokonywana jest poprzez analizę sprawdzianów, kartkówek i diagnoz wewnętrznych prowadzonych pod kątem podnoszenia kompetencji matematycznych.

Od października 2024, dzięki nauczycielom matematyki i partnerowi projektu, tj. Powiatowemu Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Poradnictwa Psychologiczno-Pedagogicznego w Górze, przygotowano i przeprowadzono wiele spotkań z chętnymi uczniami klas ósmych. Spotkania odbywały się zarówno w szkole, jak i w PCDNiPP-P w Górze. Każde z nich trwało minimum 1,5 godziny. Nauczyciel najpierw prowadził wykład, potem następowała część ćwiczeniowa. Uczniowie samodzielnie rozwiązywali przygotowane dla nich zadania. Najwięcej czasu poświęcono na rozwiązywanie typowych zadań egzaminacyjnych. Omówiono dokładnie strategię rozwiązywania zadań otwartych, co wydaje się słabą stroną egzaminów ósmoklasisty z matematyki.

Diagnozą końcową będzie egzamin ósmoklasisty w maju 2025 roku.

Plan obozu harcerskiego - scenariusz lekcji

Naturalnym sposobem wzbudzania motywacji i pozytywnych wrażeń estetycznych u uczniów jest rozwiązywanie ciekawych zadań. Proponowany scenariusz lekcji jest zaprojektowany tak, aby maksymalnie wyzwolić aktywność i samodzielność uczniów oraz wzbudzić ich ciekawość. Temat może być realizowany na kilku kolejnych lekcjach.

Temat: Narysuję plan obozu harcerskiego.

Uczeń:

- odczytuje informacje z tekstu, przetwarza je i prezentuje w żądanej formie,
- stosuje w praktyce podstawowe działania arytmetyczne, operuje procentami, posługuje się przybliżeniami i jednostkami miar, oblicza pola figur, stosuje twierdzenie Pitagorasa,
- tworzy sytuacje problemowe – układa pytania do planu.

Formy pracy: indywidualna i w grupach 4-osobowych

Materiały: zadanie „Plan obozu harcerskiego", karta pracy z naniesionym układem współrzędnych.

Przebieg lekcji:

Nauczyciel	Uczeń	Grupa
rozdaje uczniom materiały: zadanie „Plan obozu harcerskiego" i kartę pracy z układem współrzędnych		
	rysuje plan obozu	
	przekazuje swoją pracę innej osobie w grupie do sprawdzenia	
czuwa nad poprawnością układanych pytań		układa pytania, które chciałaby zadać innej grupie
		prezentuje swoje pytania na tablicy
Pod kierunkiem nauczyciela uczniowie recenzują pytania, które będą zestawem zadań na kolejną lekcję.		

Ewaluacja:

Uczniowie odpowiadają na pytania: Czego nauczyłaś/eś się na dzisiejszej lekcji; Co sprawiło ci trudność?

Zadanie „Plan obozu harcerskiego”

Na podstawie zarejestrowanego przebiegu rozmowy telefonicznej między Julką i Filipem, narysuj plan obozu harcerskiego.

Filip: Cześć Julka! Mam problem. Potrzebuję na jutrzejszą lekcje matematyki plan obozu, który sporządzaliście na lekcji. Czy możesz mi pomóc?
Julka: Oczywiście! Masz szczęście, bo mam go akurat przed sobą. Przygotuj kartę pracy z narysowanym układem współrzędnych i możemy zaczynać. Jednostka to 0,5 cm.
Filip: Jestem gotowy.
Julka: Obóz ma kształt prostokąta. Dwa wierzchołki mają współrzędne (-10;15) i (-10; -15), a pozostałe są symetryczne do nich względem osi *y*.
Filip: Mam. Teraz namioty harcerzy. Pamiętam, że to prostokąty o stosunku boków 2:3.
Julka: Dobrze. Namioty harcerzy tworzą figurę, która ma dwie osie symetrii. Jedną z nich jest oś *x*, a druga to prosta przechodząca przez punkt (-7,5; 0) i prostopadła do osi *x*.
Filip: Podaj mi współrzędne środkowego namiotu, pozostałe sześć będę wiedział, jak narysować.
Julka: Skup się. Współrzędne wierzchołków przy dłuższym boku to (-6;-1) i (-9;-1), a odległość między namiotami to 1 jednostka.
Filip: Mam już wszystkie namioty. Teraz namiot komendanta.
Julka: Podaję ci współrzędne przy krótszym boku (2;11) i (3;14). Wystarczy?
Filip: Nie. Przecież namiot komendanta jest prostokątem. Muszę mieć współrzędne jeszcze dwóch wierzchołków.
Julka: Podaję ci współrzędne kolejnego (8;9), a ostatni to twoje zadanie.
Filip: Ok. Już mam.
Julka: Teraz kuchnia.
Filip: Mam notatkę. Będę ci dyktował, a ty sprawdzaj: (6;-1), (8;-1), (9;-3), (7;-7), (5;-6), (5;-3), (4;-3) i (6;-1). Dobrze?
Julka: Tak. Zostały ci tylko dwa obiekty w kształcie wielokątów. Rysuj plac apelowy. Kwadrat o polu 50 kratek, z masztem w punkcie przecięcia przekątnych (1;2) i przekątne równoległe do osi układu współrzędnych. Masz?
Filip: Tak. Pamiętam, że plac z toaletami przylega do granic obozu. Współrzędne jednego wierzchołka mam, więc podaj dwa pozostałe.
Julka: Zaznaczaj: (-10;13) i (-4;15). Pamiętaj, że plac z toaletami ma kształt trójkąta prostokątnego.
Filip: Jasne. Pamiętam drogę biegnącą między placem apelowym i kuchnią, ale nie wiem jak mam ją zaznaczyć.
Julka: Droga przecina osie układu współrzędnych w punktach (0;-6) i (6;0). Narysowałeś?
Filip: Tak, ale czegoś mi jeszcze na tym rysunku brakuje.
Julka: Plac na ognisko narysowałeś?
Filip: Nie. Podaj współrzędne środka.
Julka: (7;-12) i średnica 4 jednostki.
Filip: Dziękuję ci. Cześć!
Julita: Cześć! Cieszę się, że mogłam ci pomóc.

Zadania, które można zaproponować uczniom po narysowaniu planu obozu

1. Oblicz, w jakiej skali został sporządzony plan, jeżeli rzeczywiste wymiary obozu harcerskiego to 60 m x 90 m.

   Odp.: $s = \frac{10\ cm}{6000\ cm} = \frac{15\ cm}{9000\ cm} = \frac{1}{600}$.

   $s = 1:600$

2. Oblicz, ile arów zajmuje obóz harcerski.

   Odp.: 60m x 90 m = 5400 m^2 = 54 a.

3. Oblicz długości boków namiotu komendanta na planie.

   Odp.: $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ i $2\sqrt{10}$.

4. Oblicz rzeczywiste wymiary namiotów harcerskich.

   Odp.: 6 m x 9 m.

5. Oblicz, ile siatki zużyto na ogrodzenie obozu. Uwzględnij szerokość bramy wjazdowej, która wynosi 6 m.

   Odp.: 294 m.

6. Oblicz długość drogi w obrębie obozu. Wynik podaj z dokładnością do 1 m.

   Odp.: 81 m.

7. Oblicz, ile metrów taśmy należałoby kupić, aby ogrodzić plac apelowy.

   Odp.: $2{,}5\sqrt{2} \cdot 600 = 1500\sqrt{2} \approx 2121\ [cm]$ $4 \cdot 2121 = 8484\ cm = 84{,}84\ m$.

8. Oblicz, ile cm^2 na planie zajmuje namiot komendanta.

   Odp.: $P = \sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 20\ j^2$ $20:4 = 5$ cm^2.

9. Oblicz, jaki procent powierzchni obozu zajmują wszystkie namioty harcerzy.

Odp.: $\frac{7 \cdot 1{,}5\ cm^2}{150\ cm^2} = 7\%$

10. Co ma większe pole: kuchnia czy namiot komendanta?

Odp.: Pola są równe.

11. Oblicz, jakim procentem wszystkich wielokątów (na planie) są obiekty w kształcie prostokątów.

Odp.: $\frac{9}{11} \cdot 100\% = 81\frac{9}{11}\%$

12. Oblicz, ile osób zmieści się na placu apelowym, jeżeli na jedną osobę przeznaczy się 0,5 m^2, a wokół masztu wydzieli się wolny teren w kształcie prostokąta o bokach 2 m x 4 m.

Odp.: $Długość\ przekątnej\ na\ planie = 5\ cm; w\ rzeczywistości: 5 \cdot 6m = 30\ m.$

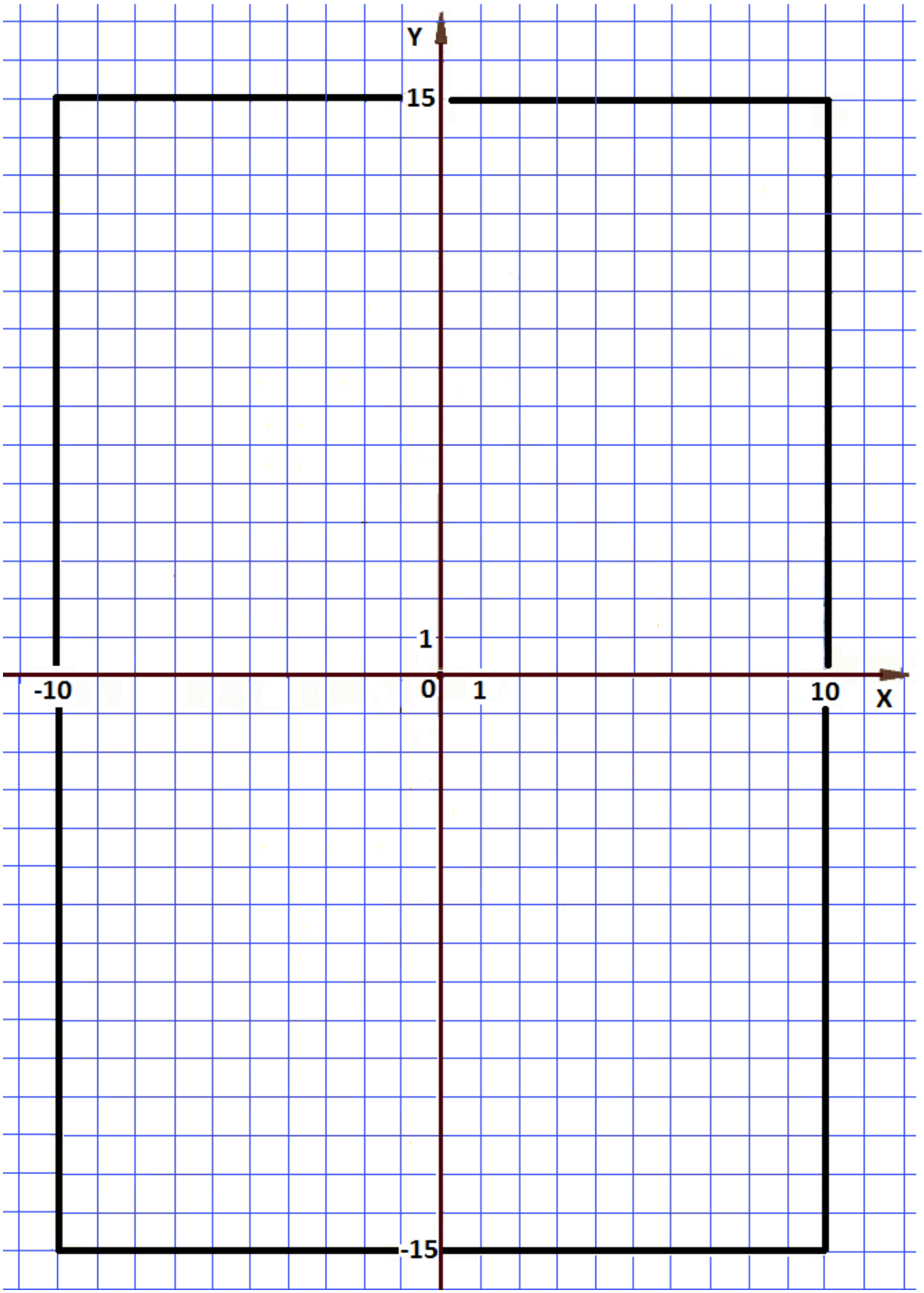
$Pole\ placu = \frac{1}{2} \cdot 30^2 = 450\ [m^2]$

$Pole\ wydzielonego\ placu = 8\ m^2$

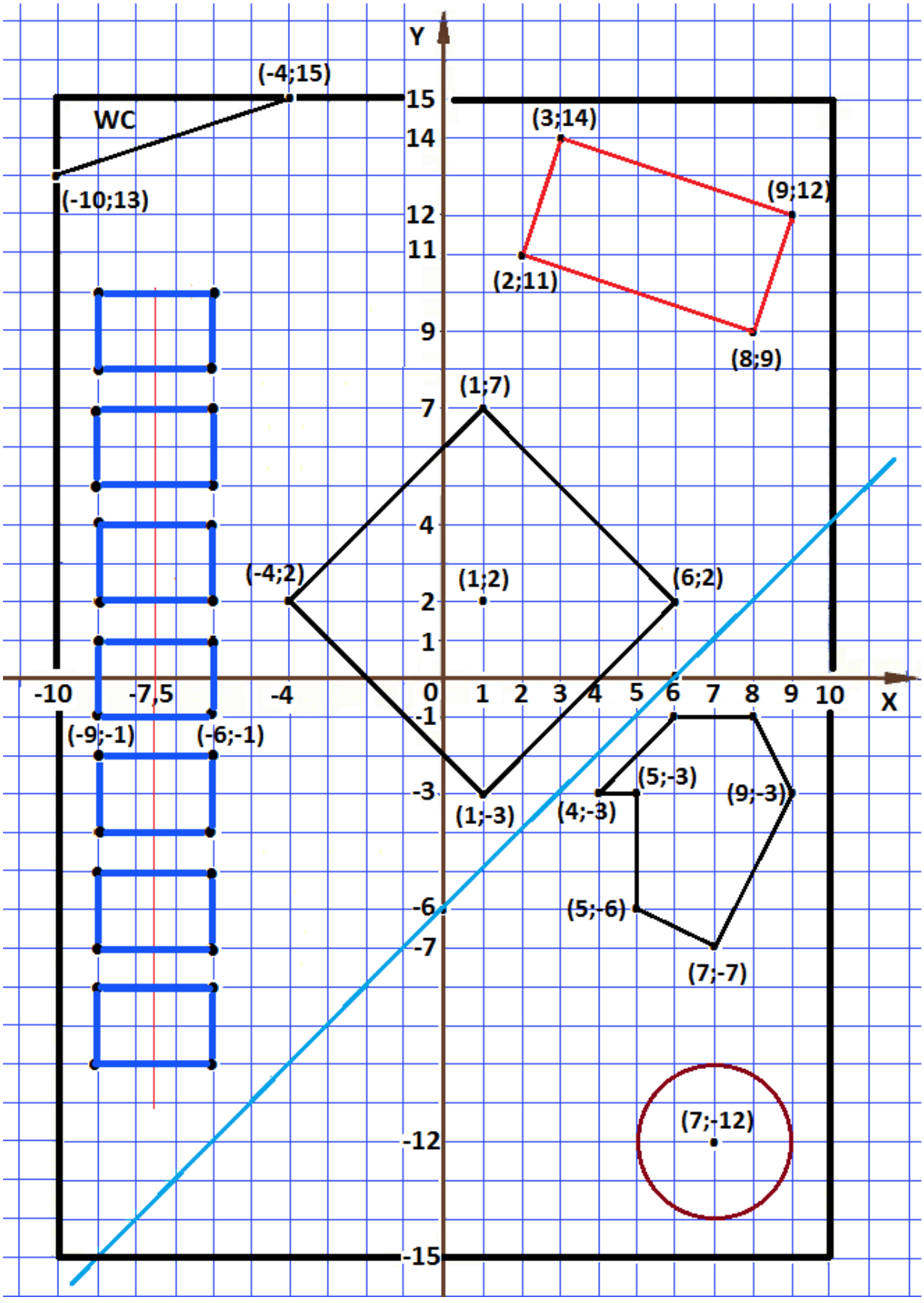
$450\ m^2 - 8m^2 = 442\ m^2$

$442\ m^2 : 0{,}5\ m^2 = 884$ osób

KARTA PRACY: PLAN OBOZU HARCERSKIEGO



PLAN OBOZU HARCERSKIEGO – ROZWIĄZANIE ZADANIA



Autor:
dr hab. Henryk Spustek, nauczyciel-konsultant
Dolnośląski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli we Wrocławiu

Matematyka - radość tworzenia i odkrywania. Kilka raczej ciekawych przykładów

Po co ludzie uczą się matematyki? Żeby uczyć matematyki innych.
Hugo Dionizy Steinhaus

Jak to się stało, że matematyka, produkt myśli ludzkiej, niezależny od doświadczenia, tak wspaniale pasuje do świata realnego?

Większość nauczycieli traci czas na zadawanie pytań, które mają ujawnić to, czego uczeń nie umie, podczas gdy nauczyciel z prawdziwego zdarzenia stara się za pomocą pytań ujawnić to, co uczeń umie lub czego jest zdolny się nauczyć.
Albert Einstein

Wprowadzenie

Powyższe cytaty są nieprzypadkowe. Pochodzą one od dwóch wybitnych intelektualistów, matematyka i fizyka, natomiast cytowane myśli odnoszą się do matematyki, a raczej sposobu jej nauczania. Uwypuklona została istota pracy z uczniem, którego przede wszystkim należy zachęcić, a nie zniechęcić do poznawania nowych obszarów wiedzy. Zachęta natomiast tkwi w tym, co nazywamy rozbudzeniem ciekawości.

Zaprezentowane poniżej przykłady (poparte źródłami pierwotnymi) mogą zostać wykorzystane jako materiał pomocniczy, zarówno do zajęć przedmiotowych, jak również podczas innych zajęć, np. kółka zainteresowań lub konieczności zastąpienia na lekcjach nieobecnego nauczyciela.

Nauczanie matematyki, a zwłaszcza jej zastosowań, jest sprawą bardzo trudną. Na lekcjach matematyki kładzie się zwykle nacisk na ścisłość wywodów i sformułowań matematycznych. Często brak czasu nie pozwala na szersze potraktowanie praktycznych zastosowań matematyki. Nauczyciele mówią zwykle o nich krótko, bez dyskusji, tak jakby było rzeczą bezsprzeczną, że model matematyczny odzwierciedla w sposób doskonały opisywane zjawiska (Hooke, Shaffer, 1969, s. 9). Stąd też w przedstawionych przykładach zwrócono uwagę na aspekt praktyczny. Tam gdzie to tylko było możliwe zostały wskazane zastosowania praktyczne.

Zwykle do rozwiązania zagadnień matematycznych prowadzi więcej niż jedna droga logicznego rozumowania. Dlatego też preferowane przez autora podejście do rozwiązywania przedstawionych problemów i niektóre ze stosowanych algorytmów obliczeniowych są odmienne od typowo stosowanych. Patrząc zatem z perspektywy ucznia, daje to jednocześnie pole do własnych poszukiwań innowacyjnych metod rozwiązywania znanych zagadnień matematycznych. Jednocześnie bardzo często uwidaczniają się, początkowo „ukryte", a jednak powiązane ze sobą zagadnienia omawiane w ramach poszczególnych przedmiotów ścisłych. Bardzo wyraźnie widać to w przypadku fizyki, gdzie model matematyczny jest szczególnie widoczny podczas analizy poszczególnych zjawisk fizycznych.

Do przedstawionych tutaj przykładów odniesiono źródła pierwotne, wśród których prym wiodą artykuły z archiwalnych numerów miesięcznika matematyczno-fizycznego Delta. Treści zawarte w archiwalnych numerach tego czasopisma stanowią kopalnię wiedzy i pomysłów do wykorzystania w ra-

mach nauczania przedmiotów ścisłych, w tym matematyki. Autor zachęca potencjalnych czytelników do zapoznania się z tym materiałem dostępnym poza postacią tradycyjną (papierową) również w formie elektronicznej[1].

W niniejszym artykule zawarto dziesięć przykładów matematycznych. Wykaz przykładów i ich krótki opis zawiera tabela 1. Natomiast aspekt metodyczny sposobu realizacji materiału dydaktycznego przedstawionego w tabeli 1, został podany w tabeli 2.

Tabela 1. Wykaz i krótki opis zawartości zamieszczonych przykładów

	Krótki opis
Przykład 1. Twierdzenie Talesa i opór zastępczy równolegle połączonych rezystorów	Konstrukcja geometryczna odcinka, którego długość jest równa wielkości oporu zastępczego dwóch rezystorów o znanej rezystancji. Przykład, który dobitnie pokazuje praktyczną korelację matematyki z fizyką.
Przykład 2. Średnia geometryczna i jej konstrukcja	Konstrukcja geometryczna odcinka, którego długość jest średnią geometryczną dwóch innych odcinków o danej długości.
Przykład 3. Średnia arytmetyczna i geometryczna w trapezie	Dwie popularne średnie wyznaczone w trapezie w prosty sposób.
Przykład 4. „Zielona fala” w ruchu miejskim	Wyznaczono wartości dopuszczalnych wartości prędkości w postaci ciągu. Podobnie jak w przykładzie 1, tutaj również pokazano korelację matematyki z fizyką.
Przykład 5. Wcale nietrudne równanie	Rozwiązanie równania zawierającego skończony ułamek łańcuchowy.
Przykład 6. Zajmujące ułamki łańcuchowe	Wprowadzenie do ciekawego zagadnienia ułamków łańcuchowych. Pokazano ułamki łańcuchowe z liczb wymiernych i niewymiernych.
Przykład 7. Ułamki łańcuchowe w zastosowaniach praktycznych	Zastosowano ułamki łańcuchowe w zagadnieniach fizycznych w przypadku układów elektrycznych zawierających nieskończoną liczbę rezystorów.
Przykład 8. Ułamek łańcuchowy i złoty podział odcinka	Pokazano związek ułamków łańcuchowych z liczbą fi (złoty podział odcinka).
Przykład 9. Rozwiązanie równania kwadratowego – inne spojrzenie	Wskazano na inny sposób rozwiązania równania kwadratowego, niewymagający jawnego stosowania wyróżnika delta.
Przykład 10. Błędy podczas prostych pomiarów	Pokazano sposób prostego wyznaczenia błędów popełnianych podczas wykonywania pomiarów (błędy towarzyszące czterem podstawowym działaniom matematycznym).

Źródło: opracowanie własne

1 https://deltami.edu.pl/numery/ [dostęp: 21.01.2025]

Tabela 2. Radość tworzenia i odkrywania – aspekt metodyczny

Cele ogólne	Cele szczegółowe	Rola nauczyciela	Sposoby realizacji celu	Prognozowane efekty
Rozwijanie umiejętności krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania i wnioskowania. Sprawne wykorzystywanie narzędzi matematyki w życiu codziennym, a także kształcenie myślenia matematycznego[2]. Rozwijanie następujących typów myślenia: analitycznego, syntetycznego, logicznego, komutacyjnego, przyczynowo-skutkowego, kreatywnego, abstrakcyjnego; zachowanie ciągłości kształcenia ogólnego rozwija myślenie zarówno percepcyjne, jak i pojęciowe. Synteza obu typów myślenia stanowi podstawę wszechstronnego rozwoju ucznia[3]	Uczeń odczuwa potrzebę poszerzenia wiedzy.	Dobór treści nauczania do możliwości uczniów.	Karta pracy – diagnoza wstępna	Uczeń dostrzega stopień skomplikowania rozważanego problemu.
	Uczeń potrafi zastosować aparat matematyczny do opisu zjawisk rzeczywistych.	Rozwijanie umiejętności logicznego myślenia, szerszego spojrzenia na omawiane zagadnienia matematyczne.	Burza mózgów / Metoda delficka Przykłady 1 – 10	Uczeń potrafi dostrzec zastosowania praktyczne w rozwiązywanym zadaniu matematycznym.
	Uczeń rozumie korelację matematyki z innymi przedmiotami (tutaj z fizyką).	Wzbogacenie treści zadania o elementy otoczenia rzeczywistego.	Stymulowanie przez nauczyciela formy dyskusji Przykłady 1 – 10	Uczeń uzyskuje odpowiedzi na stawiane pytania problemowe.
	Uczeń dąży do rozwoju własnych zainteresowań.	Zachęta do empirycznego sprawdzenia uzyskanych wyników rachunkowych.	Przykład 1 Eksperymentalne sprawdzenie wyznaczonej rezystancji zastępczej Przykład 4 Praktyczne sprawdzenie opinii Damiana Przykład 7 Eksperymentalne sprawdzenie uzyskanych wyników Przykład 10 Wykonanie pomiarów we własnym zakresie, zwrócenie uwagi na popełniany błąd pomiarowy	Rozbudzenie ciekawości i chęci do przeprowadzania dalszych eksperymentów. Zachęta do praktycznego sprawdzenia rozwiązań teoretycznych.
	Uczeń rozumie potrzebę współpracy w grupie.	Wskazanie na istotę współpracy.	Stawianie pytań problemowych Przykłady 1 - 10	Umiejętność pracy twórczej w grupie.

Źródło: opracowanie własne

2 Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej.

3 Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia.

Przykład 1

Twierdzenie Talesa i opór zastępczy równolegle połączonych rezystorów

Pewien technik w taki oto sposób dobierał rezystory do swoich obwodów elektrycznych, w przypadku połączeń równoległych.

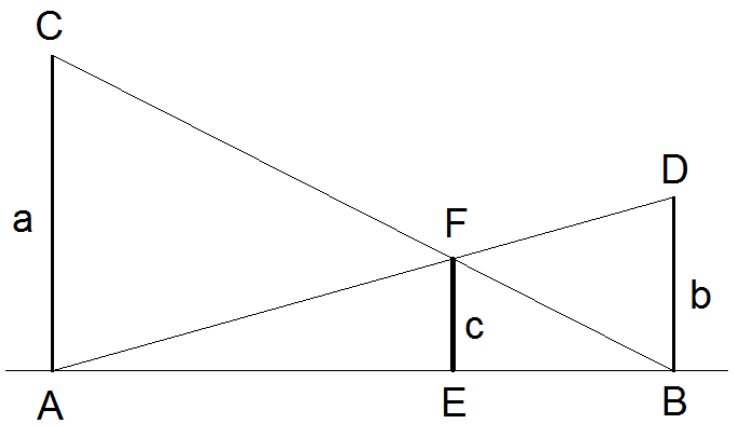
Na prostej **l** zaznaczał dwa punkty: **A** i **B**, w dowolnej odległości od siebie. Wystawiał dwie proste **m** i **n**, prostopadłe do prostej **l**, przechodzące przez punkty **A** i **B**. Na prostych **m** i **n** odmierzał dwa odcinki **AC** i **BD**, których długość odpowiada wartości rezystorów łączonych równolegle. Następnie, po połączeniu punktów **B** i **C** oraz **A** i **D**, wystawieniu prostej prostopadłej do **l** i przechodzącej przez punkt **F** uzyskał odcinek **EF**, oznaczony symbolem **c** (rys. 1.1). Długość odcinka **c**, w przekonaniu naszego znajomego technika, była równa rezystancji zastępczej dwóch rezystorów, których wartości reprezentują odcinki **a** i **b**. Zatem technik w szybki sposób mógł dobierać rezystory do swoich obwodów elektrycznych, bez potrzeby stosowania wzoru znanego z fizyki:

$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (1.1)$$

gdzie: R_1, R_2 – rezystancje połączone równolegle, R_z – rezystancja zastępcza.

W zastosowaniach praktycznych wzór (1.1) przekształcany jest do postaci:

$$R_Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (1.2)$$

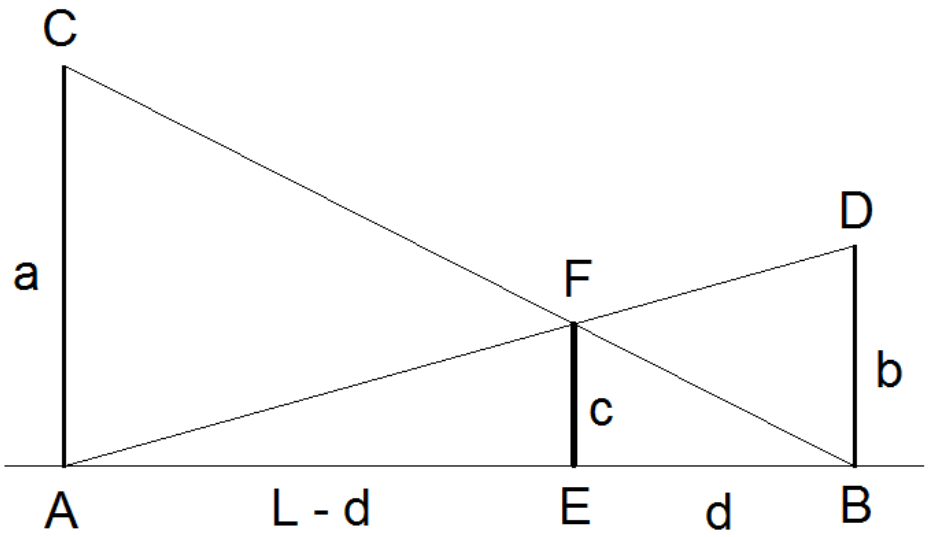


Rys. 1.1. Geometryczne wyznaczanie rezystancji zastępczej.

Źródło: opracowanie własne

Powstaje zatem pytanie: czy nasz znajomy technik prawidłowo wyznacza rezystancję zastępczą dwóch rezystorów połączonych równolegle?

Okazuje się, że tak. Z łatwością to wykażemy korzystając z twierdzenia Talesa o podobieństwie trójkątów. Wprowadzimy dodatkowe oznaczenia, jak na rys. 1.2.



Rys. 1.2. Geometryczne wyznaczanie rezystancji zastępczej c.d.

Źródło: opracowanie własne

Na podstawie informacji zawartych na rys. 1.2. możemy napisać:

$$\frac{a}{L}=\frac{c}{d} \qquad (1.3)$$

oraz

$$\frac{b}{L}=\frac{c}{L-d} \qquad (1.4)$$

Z proporcji (1.3):

$$c=\frac{ad}{L} \qquad (1.5)$$

Z proporcji (1.4):

$$Lc=b(L-d) \quad (1.6)$$

$$L=\frac{bd}{b-c} \qquad (1.7)$$

Wstawiając do zależności (1.5) wyrażenie na L z zależności (1.7) otrzymujemy:

$$c=\frac{ad}{\frac{bd}{b-c}} \qquad (1.8)$$

$$c=\frac{a(b-c)}{b} \qquad (1.9)$$

$$bc = ab - ac \qquad (1.10)$$

$$c = \frac{ab}{a+b} \qquad (1.11)$$

Porównując wyrażenia (1.2) i (1.11) widzimy, że nasz znajomy technik nie popełnił błędu, używając przedstawionej tutaj metody geometrycznej do obliczania rezystancji zastępczej obwodów elektrycznych złożonych z rezystorów połączonych równolegle.

Przykład 2
Średnia geometryczna i jej konstrukcja

Mając dane długości dwóch odcinków $\overline{a}$ i $\overline{b}$ należy znaleźć odcinek $\overline{c}$, którego długość jest średnią geometryczną tych odcinków.

Krok 1.

Na dowolnej prostej odkładamy długości odcinków $\overline{a} = \overline{AD}$ i $\overline{b} = \overline{DB}$.

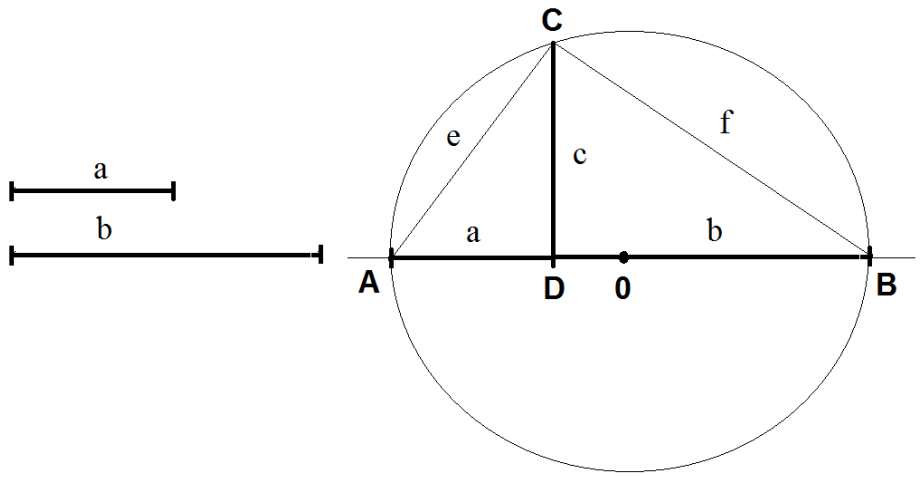
Krok 2.

Znajdujemy środek O odcinka $\overline{AB}$ i rysujemy okrąg o promieniu $\overline{OA}$.

Krok 3.

Wystawiamy prostą prostopadłą do $\overline{AB}$ przechodzącą przez punkt D.

Odcinek $\overline{c} = \overline{CD}$ stanowi poszukiwane rozwiązanie (patrz rys. 2.1).



Rys. 2.1. Konstrukcja geometryczna wyznaczania $\sqrt{ab}$

Źródło: opracowanie własne

Na podstawie rys. 2.1, zauważając, że $\sphericalangle ACB$ jest kątem prostym (opartym na półokręgu) oraz korzystając trzykrotnie z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = e^2 + f^2 \\ e^2 = a^2 + c^2 \\ f^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Podstawiając do równania pierwszego za e^2 i f^2 zależności z równania drugiego i trzeciego w układzie (2.1), otrzymujemy:

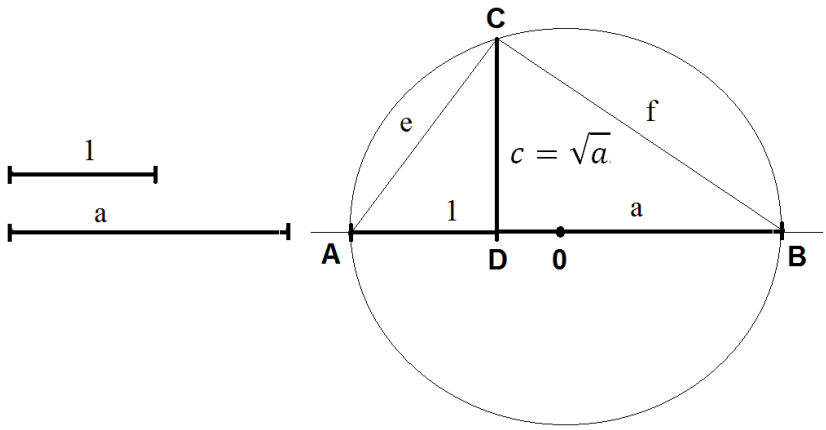
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2$$

$$ab = c$$

$$c = \sqrt{ab} \qquad (2.2)$$

Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny: jeden z odcinków ma długość jednostkową, np. $\overline{a} = 1$. Możemy wtedy zastosować przedstawioną wyżej konstrukcję geometryczną do znajdowania odcinka, którego długość jest równa pierwiastkowi kwadratowemu długości danego odcinka (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Konstrukcja geometryczna wyznaczania $\sqrt{a}$

Źródło: opracowanie własne

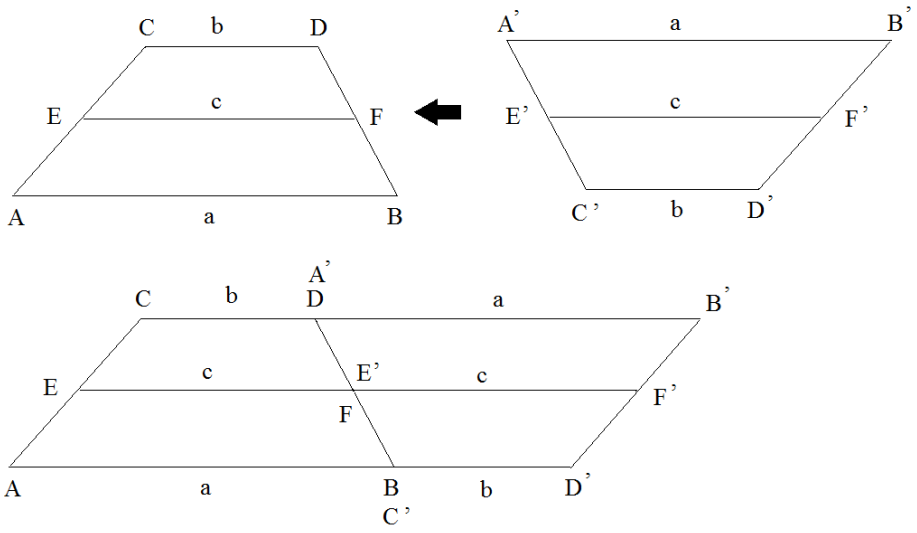
Przykład 3

Średnia arytmetyczna i geometryczna w trapezie

Średnia arytmetyczna

W trapezie ABCD wykreślono środkową EF (odcinek łączący środki ramion). Znając długości podstaw trapezu, należy znaleźć długość środkowej.

Wykonujemy rysunek pomocniczy (patrz rys. 3.1). Wiemy, że środkowa w trapezie jest równoległa do podstaw trapezu (można to wykazać korzystając z twierdzenia Talesa).



Rys. 3.1. Średnia arytmetyczna w trapezie

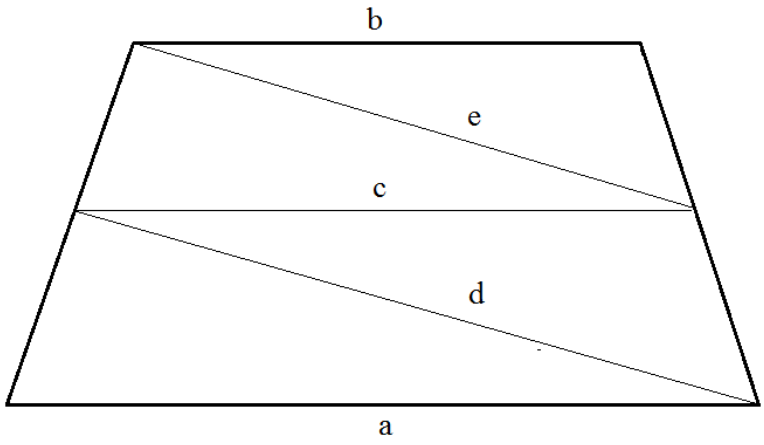
Źródło: opracowanie własne

Jak widzimy na podstawie rys. 3.1, trapez ACDB został „sklejony" z trapezem będącym jego obrazem powstałym w wyniku obrotu o 180^0 względem środka ramienia (Jaszuńska, 2005, s.10). W wyniku tego zabiegu otrzymaliśmy równoległobok ACB'D'.

Widzimy, że: $EF' = 2c = a + b$. Stąd już jasno wynika, że: $c = \frac{a+b}{2}$.

Średnia geometryczna

W celu znalezienia odcinka będącego średnią geometryczną długości podstaw trapezu, należy podzielić trapez odcinkiem równoległym do jego podstaw na dwa trapezy, w taki sposób, aby odpowiednie przekątne obu trapezów były równoległe (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Średnia arytmetyczna w trapezie[4]

Źródło: opracowano na podstawie: Delta Nr 7/2006, s.6

4 Bardzo ciekawe artykuły na temat średnich w trapezie można znaleźć w czasopiśmie Delta: Jaszuńska J., Średnie w trapezie, Delta nr 10/2005, s. 10; Matkowski J., O średnich w trapezie, Delta nr 7/2006, s. 6; Wrzesień A., Jeszcze jedna, Delta Nr 4/2006, s. 12.

Korzystając z podobieństwa trójkątów możemy napisać: $\begin{cases} \frac{a}{d}=\frac{c}{e} \\ \\ \frac{b}{e}=\frac{c}{d} \end{cases}$. (3.1)

Na podstawie proporcji pierwszej z (3.1) mamy: $e=\frac{dc}{a}$. Wstawiając tę zależność do proporcji drugiej otrzymujemy:

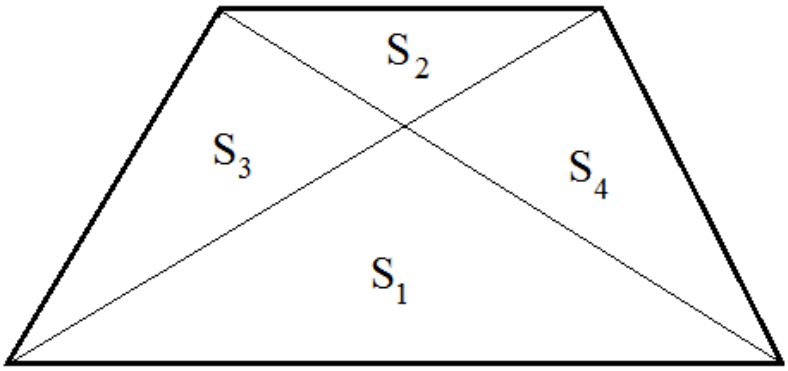
$$\frac{b}{\frac{dc}{a}}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{ab}{dc}=\frac{c}{d}$$

$$c=\sqrt{ab}$$

Obie średnie w trapezie

Okazuje się, że w trapezie można też odnaleźć ciekawą zależność pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną. Tym razem chodzi o pola trójkątów (Wrzesień, 2006, s. 12).



Rys. 3.3. Trapez z podziałem na cztery trójkąty

Źródło: opracowanie własne

Pomiędzy wielkościami pól trójkątów zaznaczonych na rys. 3.3 zachodzi następująca zależność:

$$\sqrt{S_1 \cdot S_2}=\frac{S_3+S_4}{2}.$$

Czytelnik zainteresowany dowodem tej zależności może zajrzeć do archiwalnego numeru czasopisma Delta dostępnego w wersji elektronicznej na stronie wydawnictwa[5].

5 Wrzesień A., Jeszcze jedna, Delta Nr 4/2006 s. 12 dostępny w wersji elektronicznej: https://deltami.edu.pl/2006/4/ [dostęp:20.01.2025]

Przykład 4
„Zielona fala” w ruchu miejskim

Damian jest dostawcą pizzy i codziennie jeździ swoim rowerem po mieście. W całym mieście funkcjonuje „zielona fala”, tzn. światła na wszystkich skrzyżowaniach ustawione są w taki sposób, że umożliwiają one płynne poruszanie się samochodów pomiędzy skrzyżowaniami. Oznacza to, że w przypadku wjazdu na dane skrzyżowanie podczas trwania zielonego światła i jazdy z prędkością 50 km/h, na następnym skrzyżowaniu również natrafimy na zielone światło. Damian uważa tę sytuację za niesprawiedliwą z uwagi na to, że jego rower porusza się znacznie wolniej i niestety zmuszony jest oczekiwać na zielone światło na poszczególnych skrzyżowaniach. Czy Damian ma rację uważając, że „zielona fala” dyskryminuje rowerzystów?

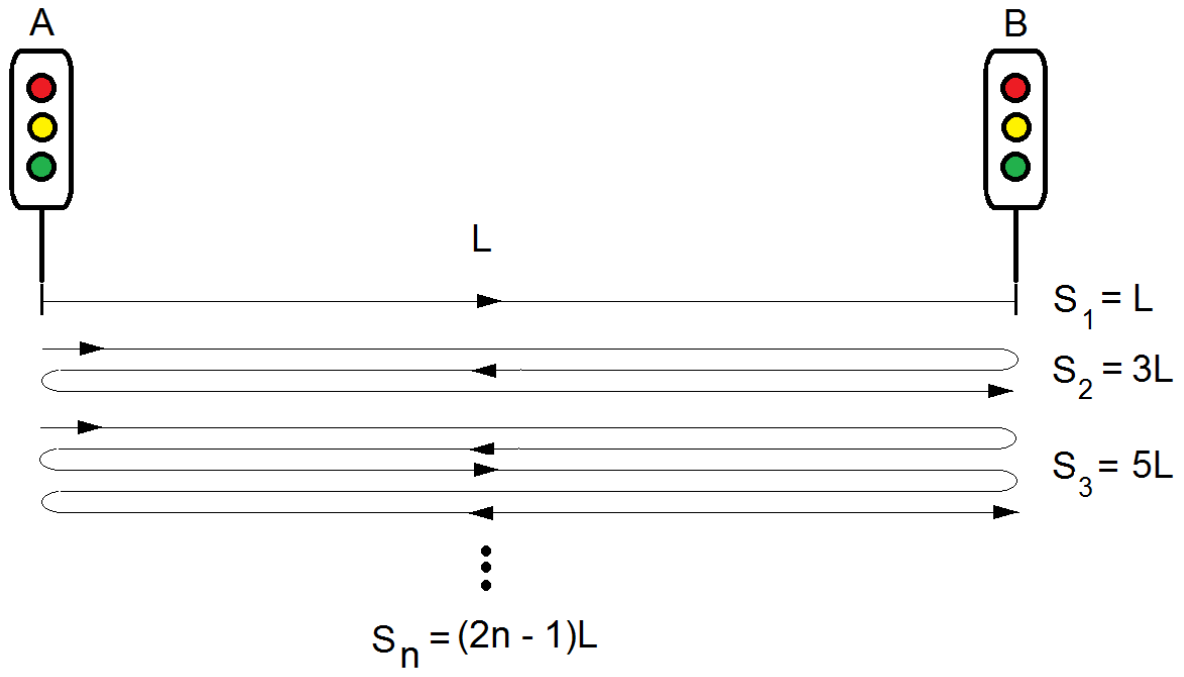
W celu uproszczenia obliczeń założymy, że na każdym skrzyżowaniu zielone światła w obu kierunkach ruchu, na tej samej ulicy, zapalają się jednocześnie, a czas przejazdu przez skrzyżowanie przyjmujemy równy zeru[6].

Rozwiązanie dylematu Damiana sprowadza się do znalezienia odpowiedzi na dwa pytania:

1. Czy istnieje tylko jedna wartość prędkości pojazdu pozwalająca na skorzystanie z „zielonej fali” w ruchu miejskim?

2. Jeśli zaś możliwe są inne prędkości, to z jaką prędkością powinien poruszać się Damian na swoim rowerze, aby płynnie przejeżdżać przez skrzyżowania?

Odpowiedź na pierwsze pytanie znajdziemy analizując sytuacje, w których możliwe staje się dotarcie do następnego skrzyżowania w taki sposób, aby czas ruchu pomiędzy skrzyżowaniami był zawsze wielokrotnością czasu potrzebnego na przebycie tej drogi przez samochód jadący z prędkością 50 km/h. Istotę naszego problemu dobrze ilustruje rys. 4.1.



Rys.4.1. Ilustracja „zielonej fali” pomiędzy dwoma skrzyżowaniami

Źródło: opracowanie własne

6 Podobny problem był rozważany na łamach jednego z numerów czasopisma Delta (Mąkowski A., Zadania, Delta Nr 5/1975, s. 17). Wykazano, że istnieje nieskończenie wiele wartości prędkości spełniających warunki przedstawionego zadania.

Rozważmy całkowicie teoretycznie niżej opisaną sytuację. Na dane skrzyżowanie wjeżdża pojazd z prędkością:

- V i dojeżdża do następnego skrzyżowania przebywając odległość L;
- 3V, dojeżdża do następnego skrzyżowania, zastaje światło czerwone, zawraca docierając do pierwszego skrzyżowania, trafiając znowu na światło czerwone, powtórnie zawraca i tym razem trafia już na światło zielone, przebywając drogę 3L.

Uogólniając, wjazd z prędkością $(2n-1)V$, umożliwia skorzystanie z „zielonej fali" po przebyciu drogi $(2n-1)L$, gdzie n = 1, 2, 3, ... (patrz rys. 4.1). Oczywiście sytuacja ta nie jest możliwa w rzeczywistości, ale możemy nasze rozumowanie nieco zmodyfikować. Na nasze skrzyżowanie wjeżdżają dwa pojazdy: jeden z prędkością $\frac{V}{3}$, a drugi z prędkością V. Pierwszy pojazd trafia na „zieloną falę", a drugi zaś, aby przejechać na zielonym świetle, musi zawrócić i po powtórnej zmianie kierunku ruchu wjeżdża na skrzyżowanie razem z pojazdem pierwszym. Widzimy zatem, że prędkości zapewniających skorzystanie z „zielonej fali" jest nieskończenie wiele. Ważne jest, aby spełniona była zależność:

$$V_n = \frac{V}{2n+1}, \qquad \text{gdzie } n \in N \qquad (4.1)$$

Zatem dla kolejnych n mamy:

- $V_0 = V = 50\,km/h$;
- $V_1 = \frac{V}{3} \approx 16,7\,\frac{km}{h}$;
- $V_2 = \frac{V}{5} = 10\,\frac{km}{h}$.

Widzimy zatem, że Daman, podróżując po mieście rowerem, nie jest dyskryminowany na skrzyżowaniach objętych „zieloną falą". Również pieszy, poruszając się z prędkością ok. 4,5 km/h, trafia na „zieloną falę" na kolejnych skrzyżowaniach. Mało tego, okazuje się, że równie dobrze poradzi sobie żółw i ślimak. Pierwszy porusza się z prędkością ok. 20 mm/s (70 m/h = 0,07 km/h), a ślimak ok. 1,5 mm/s (5,5 m/h = 0,005 km/h)[7].

Przykład 5
Wcale nietrudne równanie

Rozwiąż równanie:

$$3 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}$$

7 Damian, bohater naszego przykładu, występuje też w roli rowerzysty „rekordzisty", który próbuje dokonać rzeczy niemożliwej. Zainteresowany czytelnik powinien zajrzeć do : Spustek H., Damian, jego rower i zaskakujące wyniki w zadaniach z fizyki, Skrypty Belfra Nr 73/2024. https://dodn.dolnyslask.pl/materialy/skryptybelfra/SkrBNr73a.pdf [dostęp:20.01.2025]

Zakładamy, że $x \neq 0$, i kolejno przekształcamy prawą stronę równania, poruszając się „w górę”. Rozpoczynamy od sprowadzenia do wspólnego mianownika wyrażenia:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=1+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1}, \text{ przy założeniu, że: } x \neq -1.$$

Przekształcając dalej otrzymujemy:

$$1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}=1+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3x+2}{2x+1}, \text{ przy założeniu, że: } x \neq -\frac{1}{2}.$$

$$1+\frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}}=1+\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{5x+3}{3x+2}, \text{ przy założeniu, że: } x \neq -\frac{2}{3}.$$

Pozostaje nam zatem rozwiązać równanie w postaci:

$$3=\frac{3x+2}{5x+3}, \text{ przy założeniu, że: } x \neq -\frac{3}{5}.$$

$$\frac{3x+2}{5x+3}-3=0$$

$$\frac{3x+2-3(5x+3)}{5x+3}=0 \qquad -12x-7=0 \qquad x=-\frac{7}{12}$$

Przykład 6
Zajmujące ułamki łańcuchowe

Pojęcie ułamka łańcuchowego pochodzi od greckiego matematyka Teajtetosa (410 – 368 p.n.e.), który był uczniem Platona. Głównym powodem powstania ułamków łańcuchowych stał się problem z zagadnieniem niewymierności. Z biegiem czasu i rozwoju matematyki, ułamki łańcuchowe straciły w arytmetyce na ważności. Niemniej jednak trzeba stwierdzić, że dokładność przybliżeń liczb niewymiernych oferowana przez ułamki łańcuchowe jest wyższa od dokładności przybliżeń dziesiętnych.

Na początek powiedzmy kilka słów o łańcuchowej reprezentacji liczb. Reprezentacja dowolnej liczby a w postaci ułamka łańcuchowego ma następującą postać:

$$a=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\dots}}} \qquad (6.1)$$

gdzie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są ciągiem dodatnich liczb całkowitych, zwanych widmem liczby a.

Jeżeli $a < 1$, to $a_1 = 0$. Wygodnie jest zapisać reprezentację ułamka łańcuchowego w postaci: $[a_1, a_2, a_3, \ldots]$. Oczywiście a jest liczbą wymierną, jeśli proces rozwijania jej do postaci łańcuchowej jest skończony, tj. widmo jest skończone. Twierdzenie odwrotne również jest prawdziwe.

Liczbę wymierną:

$$r_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n] \qquad (6.2)$$

nazywa się n-tym przybliżeniem a (Small, Hosack, 1995, s.130).

Skoro wiemy, na czym polega łańcuchowa reprezentacja liczb, to spróbujmy zapisać w tej reprezentacji liczbę wymierną, np. $\frac{7}{5}$:

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}.$$

Otrzymaliśmy reprezentację liczby $\frac{7}{5}$ w postaci ułamka łańcuchowego, co możemy zapisać krócej, używając wprowadzonego wyżej pojęcia widma, tj. w postaci: $[1, 2, 2]$.

Pójdźmy teraz w drugą stronę: mając dane widmo ułamka łańcuchowego danej liczby a, znajdźmy tę liczbę. Niech widmem tym będzie: $[1, 2, 3, 2]$. Wówczas:

$$a = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}} = 1 + \frac{7}{16} = \frac{23}{16}.$$

Skoro tak dobrze nam idzie, to jak się będzie miała sprawa z liczbą niewymierną? W jaki sposób znaleźć widmo ułamka łańcuchowego liczby niewymiernej?

Zauważmy, że dla danej liczby a zachodzi zależność:

$$a = [a] + (a - [a]), \qquad (6.3)$$

gdzie $[a]$ jest częścią całkowitą liczby a.

Zatem przekształcając dalej mamy:

$$a=[a]+\left(a-[a]\right)=[a]+\frac{1}{\frac{1}{a-[a]}}=[a]+\frac{1}{\left[\frac{1}{a-[a]}\right]+\left(\frac{1}{a-[a]}-\left[\frac{1}{a-[a]}\right]\right)}=$$

$$=[a]+\frac{1}{\left[\frac{1}{a-[a]}\right]+\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a-[a]}-\left[\frac{1}{a-[a]}\right]}}}=\ldots$$

Teraz już powinniśmy umieć przedstawić liczbę niewymierną w postaci ułamka łańcuchowego. Przedstawmy w postaci ułamka łańcuchowego liczbę $a=\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}\approx 1,73\ldots$, zatem część całkowita $\sqrt{3}$ wynosi 1, co zapisujemy w następujący sposób: $\left[\sqrt{3}\right]=1$

Zgodnie z zależnością (6.3) napiszemy:

$$\sqrt{3}=\left[\sqrt{3}\right]+\left(\sqrt{3}-\left[\sqrt{3}\right]\right)=1+\left(\sqrt{3}-1\right)=1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

Z kolei liczbę niewymierną $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, występującą w mianowniku w ułamku wyżej, można przedstawić następująco:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]\right)=1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1=1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}=1+\frac{1}{\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

Następnie:

$$\sqrt{3}+1=\left[\sqrt{3}+1\right]+\left(\sqrt{3}+1-\left[\sqrt{3}+1\right]\right)=2+\sqrt{3}-1=2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

Zauważamy, że ułamek niewymierny $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ był już rozpatrywany wyżej, zatem sytuacja będzie się okresowo powtarzać. Wobec tego $\sqrt{3}$ możemy przedstawić w postaci nieskończonego ułamka łańcuchowego w następujący sposób:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Wynik możemy zapisać krócej, w postaci widma: $[1,1,2,1,\ldots]$.

Zaprezentowany tutaj tok postępowania można wykorzystać do budowy stosownego algorytmu w taki sposób, aby możliwym stało się wygenerowanie przez komputer postaci łańcuchowej dowolnej liczby niewymiernej (Spustek, 2000, s. 69).

Przy znajdowaniu reprezentacji wybranych liczb niewymiernych w postaci ułamka łańcuchowego, przydatne jest niżej podane twierdzenie Eulera. Twierdzenie to znacznie upraszcza obliczenia.

Twierdzenie Eulera

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas reprezentacją $\sqrt{1+n^2}$ w postaci ułamka łańcuchowego jest następujące widmo $[n,2n,2n,2n,\ldots]$.

Teraz z łatwością rozwiniemy, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, itd. ...

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1^2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{1+2^2} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{1+3^2} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Nadszedł czas na aspekt praktyczny ułamków łańcuchowych: po co nam ułamki łańcuchowe? Czy są jakieś zastosowania tych ułamków, inne od czysto matematycznych potyczek? Odpowiedź jest twierdząca: Tak, oczywiście są.

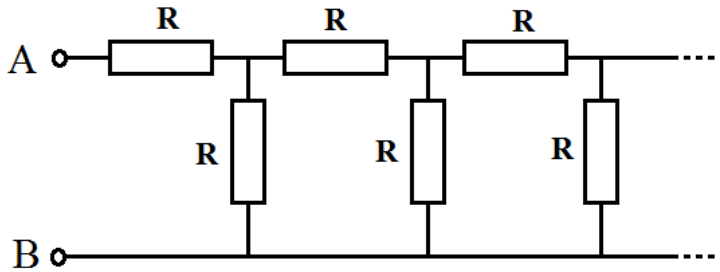
Dobrym przykładem jest wyznaczanie rezystancji zastępczej obwodu składającego się z nieskończonej liczby rezystorów, co jest tematem przykładu siódmego[8].

8 Materiały na ten temat znajdziemy w archiwalnych czasopismach miesięcznika Delta, gdzie poruszany jest problem wyznaczania oporu zastępczego symetrycznych układów elektrycznych, składających się ze skończonej i nieskończonej liczby rezystorów: Czuchry, E., Zadanie F 575, Delta Nr 7/2002 s. 6; Czuchry, E., Elektryczne układy samopodobne, Delta Nr 2/2003, s. 4; Czuchry, E., Teoria liczb a opór zastępczy, Delta Nr 7/2006, s. 8-9.

Przykład 7

Ułamki łańcuchowe w zastosowaniach praktycznych

Dany jest nieskończony układ rezystorów tworzących obwód elektryczny (rys. 7.1). Należy znaleźć opór zastępczy tego układu pomiędzy punktami A i B.



Rys. 7.1. Obwód elektryczny zawierający nieskończoną liczbę rezystorów

Źródło: opracowanie własne

Popatrzymy na układ w taki sposób, jak to znajdujemy w podręcznikach do fizyki (Jędrzejewski, 1988, s. 241).

Przypomnijmy:

- W przypadku połączenia szeregowego n - rezystorów, opór zastępczy R_z całego obwodu jest równy sumie rezystancji poszczególnych rezystorów:

$$R_z = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n . \qquad (7.1)$$

- W przypadku połączenia równoległego n - rezystorów, odwrotność oporu zastępczego R_z całego obwodu jest równa:

$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n} \qquad (7.2)$$

W przypadku połączenia dwóch rezystorów, praktycznie łatwiej jest stosować wzór:

$$R_Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (7.3)$$

Kluczowe dla rozwiązania naszego zadania jest następujące stwierdzenie:

Ponieważ przedstawiony układ składa się z rezystorów zgromadzonych w nieskończonej liczbie identycznych oczek (tak, jak pokazano na rys. 7.1), to dodanie do tego układu skończonej liczby takich samych oczek nie zmienia rezystancji zastępczej tego układu.

Biorąc pod uwagę powyższe stwierdzenie, możemy napisać: $R_Z = R + \frac{RR_Z}{R + R_Z}$.

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy zależność na opór zastępczy naszego układu rezystorów:

$$R_Z = \frac{1}{2} R\left(1+\sqrt{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} R\,.$$

Teraz czas na ułamek łańcuchowy. Współczynnik stojący przy R przedstawimy w ułamka łańcuchowego.

W myśl tego, co powiedzieliśmy w przykładzie 6 o widmie ułamka łańcuchowego liczby niewymiernej, możemy napisać: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\right)$.

Widzimy, że: $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1$ oraz $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Zatem $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}$.

Z kolei: $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1 + \frac{1}{\frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

W efekcie otrzymujemy:

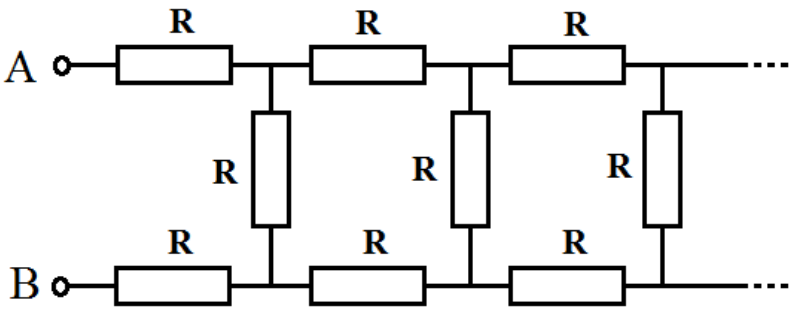
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}\,.$$

Widzimy, że opór zastępczy naszego układu rezystorów można przedstawić za pomocą nieskończonego ułamka łańcuchowego, jako:

$$R_z = R\frac{1+\sqrt{5}}{2} = R\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}\right). \qquad (7.4)$$

Rozważmy teraz układ rezystorów przedstawiony na rys. 7.2. Opór zastępczy tego układu, obliczony analogicznie jak wyżej, wynosi:

$$R_z = R\left(1+\sqrt{3}\right).$$



Rys. 7.2. Nieskończony obwód elektryczny

Źródło: opracowanie własne

Zapisując $\sqrt{3}$ w postaci ułamka łańcuchowego, rozwiązanie przyjmuje postać:

$$R_z = R\left(1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}}\right). \qquad (7.5)$$

Przykład 8

Ułamek łańcuchowy i złoty podział odcinka

Liczba w nawiasie, którą otrzymaliśmy w zależności 7.4 (przykład 7), jest tzw. złotą liczbą fi.

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}} \qquad (8.1)$$

Ułamek łańcuchowy (8.1) daje kolejne przybliżenia liczby fi. Liczba ta w zapisie dziesiętnym wynosi: 1,618 ... .

Złoty podział odcinka polega na takim jego podzieleniu na dwie części, aby stosunek długości całego odcinka do długości dłuższej części odcinka był równy stosunkowi długości dłuższej części odcinka do części krótszej (rys. 8.1).



Rys. 8.1. Podział odcinka na dwie części

Źródło: opracowanie własne

$$\varphi = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y},$$

Stąd: $y(x+y) = x^2$ Przekształcając dalej, otrzymujemy zależność pomiędzy długością dłuższej i krótszej części odcinka: $x^2 - xy - y^2 = 0$. (8.2)

Wstawiając $x = 1$ do zależności (8.2) otrzymujemy: $y^2 + y - 1 = 0$. (8.3)

Biorąc pod uwagę dodatnie rozwiązanie równania (8.3) mamy: $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Stąd: $$\varphi = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

Tak oto, w efekcie końcowym otrzymaliśmy reprezentację złotej liczby fi w postaci ułamka łańcuchowego. Oczywiście, złoty podział odcinka można stosować w nieskończoność.

Zobaczmy jaki będzie wynik naszych rozważań, jeżeli do zależności (8.2) podstawimy $x = 2$.

Otrzymamy wówczas: $y^2 + 2y - 4 = 0$.

Stąd: $y = \sqrt{5} - 1$ oraz $$\frac{x}{y} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

Otrzymaliśmy, zgodnie z oczekiwaniem, złotą liczbę fi.

Przykład 9

Rozwiązanie równania kwadratowego – inne spojrzenie

Rozwiążemy równanie kwadratowe bez użycia standardowo stosowanych wzorów zawierających pojęcie delty[9].

Rozpatrzmy przykładowe równanie kwadratowe: $2x^2 - 3x + 1 = 0.$

9 Celowość wprowadzania „na siłę" delty, czyli wyróżnika równania kwadratowego, słusznie poddano pod wątpliwość w czasopiśmie Delta Nr 2/1997 s. 8. Okazuje się, że nie ma potrzeby pamiętania wzoru na deltę w postaci: „delta równa się be kwadrat mniej cztery ace". Mało tego, wzór ten funkcjonuje tylko w nielicznych krajach, w tym w Polsce. Wprawdzie nie jest to nic zdrożnego, ale warto pokazać inne podejście do zagadnienia rozwiązywania równań kwadratowych.

Krok 1. Dzielimy równanie stronami przez 2, aby współczynnik stojący przy x^2 był równy 1.

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0.$$

Krok 2. Dodajemy i odejmujemy od lewej strony równania kwadrat połowy współczynnika stojącego przy x w naszym równaniu, otrzymując:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Krok 3. Grupując w powyższym równaniu trzy pierwsze wyrazy, mamy:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Przekształcamy dalej:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.$$

Krok 4. Teraz należy zastosować wzór na różnicę kwadratów.

$$\left(x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Otrzymaliśmy iloczyn dwóch wyrażeń liniowych i stąd otrzymujemy dwa rozwiązania naszego równania kwadratowego: 1 i 1/2.

Rozwiązaliśmy równanie kwadratowe, nie używając w sposób jawny pojęcia wyróżnika. Trzeba tu jeszcze dodać, że w przypadku, gdy w kroku w kroku trzecim otrzymamy sumę, której drugi składnik będzie różny od zera, równanie kwadratowe nie będzie miało rozwiązania. „Ominięcie" delty jest tu oczywiście pozorne, bo pojawia się ona w toku rozwiązania w sposób niezauważalny. Powinniśmy to zauważyć, wykonując cztery powyższe kroki i posługując się symbolami, nie zaś konkretnymi liczbami.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe: $ax^2 + bx + c = 0$.

Krok 1. Dzielimy równanie stronami przez a (przy założeniu $a \neq 0$)

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Krok 2. Dodajemy i odejmujemy od lewej strony równania kwadrat połowy współczynnika stojącego przy x w naszym równaniu, otrzymując:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Krok 3. Grupując w powyższym równaniu trzy pierwsze wyrazy, mamy:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Przekształcamy dalej:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Podstawiając: $\Delta = b^2 - 4ac$, mamy: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$, przy założeniu, że $\Delta \geq 0$.

Krok 4. Teraz należy zastosować wzór na różnicę kwadratów.

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Otrzymujemy znane nam wzory:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - = \frac{-\mathrm{b} -}{2\mathrm{a}}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + = \frac{-\mathrm{b} +}{2\mathrm{a}}$$

Widzimy, że w toku procesu rozwiązywania naszego zadania delta nadal funkcjonuje, a jednak w przedstawionym wyżej wariancie rozwiązania nie ma potrzeby pamiętania zarówno wzoru matematycznego opisującego wyróżnik równania kwadratowego, jak również wzorów końcowych opisujących rozwiązanie. W zasadzie jedyną rzeczą, jaką należy zapamiętać, aby rozwiązać dane równanie kwadratowe, jest reguła zawarta w pierwszych dwóch krokach przedstawionego wyżej algorytmu, tzn. należy zadbać, aby:

- współczynnik stojący przy x^2 był równy 1;
- dodać i odjąć od lewej strony równania kwadrat połowy współczynnika stojącego przy x.

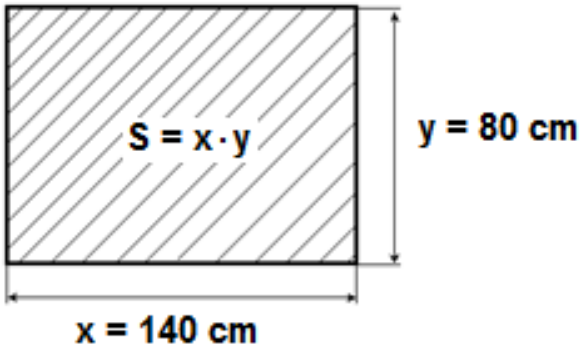
Dalej mamy już tylko zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 10

Błędy podczas prostych pomiarów (Spustek, 2012, s. 11-14).

Rozpatrzmy następujący problem. Jesteśmy w posiadaniu prostokątnego stołu o wymiarach: $x = 140$ cm oraz $y = 80$ cm (rys. 10.1). Dysponujemy miarką umożliwiającą pomiar długości z dokładnością do 1 mm. Chcemy określić błąd bezwzględny, błąd względny oraz błąd względny procentowy, jaki popełnimy podczas:

a) wyznaczenia obwodu stołu;
b) wyznaczenia pola powierzchni stołu;
c) obliczenia różnicy długości boków stołu;
d) obliczenia stosunku długości boków stołu.



Rys. 10.1. Prostokątny stół

Źródło: opracowanie własne

Na początek, zanim rozwiążemy nasz problem, określimy błędy czterech podstawowych działań arytmetycznych (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia).

Dane są wielkości x i y oraz błędy bezwzględne Δx i Δy, z jakimi zostały te wielkości wyznaczone. Poszukujemy błędu względnego wielkości z będącej kolejno: sumą, różnicą, iloczynem i ilorazem wielkości x i y.

Minimalne i maksymalne wartości wielkości x i y wynoszą:

$$x_{\min} = x - \Delta x,\ x_{\max} = x + \Delta x,$$

$$y_{\min} = y - \Delta y,\ y_{\max} = y + \Delta y.$$

Błąd bezwzględny szukanej wielkości z wynosi: $\Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2}$, zaś błąd względny dany jest wyrażeniem: $\delta = \frac{\Delta z}{z}$. Jak widzimy, względny błąd pomiaru jest stosunkiem błędu bezwzględnego do wielkości mierzonej. Natomiast błąd względny procentowy określony jest wzorem: $\delta_{\%} = \frac{\Delta z}{z} \cdot 100\%$.

- Działanie dodawania

$$z = x + y$$

Zadajemy sobie pytanie: kiedy suma dwóch wielkości jest maksymalna a kiedy minimalna?

Odpowiedź jest prosta: suma dwóch składników ma wartość maksymalna wtedy, gdy oba składniki sumy mają wartość maksymalną. Podobnie, suma dwóch składników ma wartość minimalną wtedy, gdy oba składniki sumy mają wartość minimalną. Wynik naszego rozumowania zapisano poniżej.

$$z_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = x + \Delta x + y + \Delta y = x + y + (\Delta x + \Delta y)$$

$$z_{\min} = x_{\min} + y_{\min} = x - \Delta x + y - \Delta y = x + y - \left(\Delta x + \Delta y\right)$$

$$\Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} = \Delta x + \Delta y$$

$$\delta = \frac{\Delta z}{z} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2z} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$$

- Działanie odejmowania

$$z = x - y$$

Podobnie jak przy dodawaniu, w przypadku działania odejmowania powiemy, że różnica dwóch wielkości ma wartość maksymalną, gdy od wartości maksymalnej pierwszej wielkości odejmiemy wartość minimalną wielkości drugiej. Natomiast różnica dwóch wielkości ma wartość minimalną, gdy od minimalnej wartości wielkości pierwszej odejmiemy wartość maksymalną wielkości drugiej, co zapisano poniżej.

$$z_{\max} = x_{\max} - y_{\min} = x + \Delta x - \left(y - \Delta y\right) = x - y + \left(\Delta x + \Delta y\right)$$

$$z_{\min} = x_{\min} - y_{\max} = x - \Delta x - \left(y + \Delta y\right) = x - y - \left(\Delta x + \Delta y\right)$$

$$\Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} = \Delta x + \Delta y$$

$$\delta = \frac{\Delta z}{z} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2z} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$$

Uwaga: widzimy, że podczas naszych pomiarów, wykonując zarówno działanie dodawania, jak i odejmowania, popełniony błąd bezwzględny i względny jest taki sam.

Analogicznie do rozumowania przeprowadzonego w przypadku określania błędów działań: dodawania i odejmowania, uzyskamy stosowne zależności dla działań: mnożenia i dzielenia.

- Działanie mnożenia

$$z = xy$$

$$z_{\max} = x_{\max} y_{\max} = \left(x + \Delta x\right)\left(y + \Delta y\right) = xy + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

$$z_{\min} = x_{\min} y_{\min} = \left(x - \Delta x\right)\left(y - \Delta y\right) = xy - x\Delta y - y\Delta x + \Delta x\Delta y$$

$$\Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} = x\Delta y + y\Delta x \qquad \delta = \frac{\Delta z}{z} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2z} = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{xy}$$

- Działanie dzielenia

$$z = \frac{x}{y}$$

$$z_{\max} = \frac{x_{\max}}{y_{\min}} = \frac{x + \Delta x}{y - \Delta y}$$

$$z_{\min} = \frac{x_{\min}}{y_{\max}} = \frac{x - \Delta x}{y + \Delta y}$$

$$\Delta z = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x + \Delta x}{y - \Delta y} - \frac{x - \Delta x}{y + \Delta y} \right) = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2 - (\Delta y)^2}$$

$$\delta = \frac{\Delta z}{z} = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2z} = \frac{(x\Delta y + y\Delta x)\, y}{\left[y^2 - (\Delta y)^2 \right] x}.$$

Mając na uwadze powyższe rozważania możemy obliczyć wszystkie wielkości, które chcieliśmy wyznaczyć w naszym przykładzie.

Wyniki pomiaru:
a) obwodu stołu:

$$2 \cdot (x + y) = 2(1400 + 800) \ \ mm \pm 4 \cdot 1 \ \ mm = 4400 \ \ mm \pm 4 \ \ mm.$$

Błąd bezwzględny wynosi 4 mm, błąd względny: $\delta = \frac{4}{4400} = \frac{1}{1100} \approx 9,09 \cdot 10^{-4}$,

błąd względny procentowy: $\delta_{\%} = \frac{1}{11}\% \approx 0,091\%$.

b) pola powierzchni stołu:

$$x \cdot y = 1400 \cdot 800 \pm (1400 \cdot 1 + 800 \cdot 1) \ \ mm^2 = 112 \cdot 10^4 \pm 2200 \ \ mm^2.$$

Błąd bezwzględny wynosi 2200 mm^2, błąd względny: $\delta = \frac{2200}{112 \cdot 10^4} = \frac{0,22}{112} \approx 19,64 \cdot 10^{-4}$, błąd względny procentowy: $\delta_{\%} \approx 0,2\%$.

c) różnica długości boków stołu:

. $x - y = (1400 - 800)\ \ mm \pm 2 \cdot 1\ \ mm = 600\ \ mm \pm 2\ \ mm$.

Błąd bezwzględny wynosi 2 mm, błąd względny: $\delta = \frac{2}{600} = \frac{1}{300} \approx 33 \cdot 10^{-4}$,

błąd względny procentowy: $\delta_{\%} = \frac{1}{3}\% \approx 0,33\%$.

d) stosunek długości boków stołu:

$$\frac{x}{y} = \frac{1400}{800} \pm \frac{(1400 \cdot 1 + 800 \cdot 1) \cdot 800}{(800^2 - 1^2) \cdot 1400} \approx 1,75 \pm 0,002.$$

Błąd bezwzględny wynosi 0,2 zaś błąd względny: $\delta = \frac{0,002}{1,75} \approx 1,14 \cdot 10^{-3}$, natomiast błąd względny procentowy: $\delta_{\%} = 0,11\%$.

W ramach zakończenia

Przykłady przedstawione w artykule są zróżnicowane zarówno tematycznie, jak również pod względem stopnia trudności. Wiemy przecież, że zadania matematyczne są bardzo różnorodne. Wśród tej różnorodności zadań matematycznych występują zadania typowe, zadania absolutnie nietypowe, zadania o charakterze subiektywnie twórczym, zadania „z niespodzianką" i inne (Pruski, 1984, s. 19-26). W podanych przykładach odnajdziemy przedstawicieli tych gatunków zadań. To, czy zadanie ma charakter twórczy, zależy od subiektywnego odczucia ucznia popartego jego zasobem wiedzy. Podobnie jest w przypadku zadania „z niespodzianką". Rzekoma niespodzianka nią jest lub nie, to również jest uzależnione od tego, czy w typowym zadaniu, którego treść wydaje się być standardowa, uczeń napotka na przeszkodę lub odkryje coś, czego początkowo się nie spodziewał (dylemat Damiana w przykładzie 4 – „Zielona fala" w ruchu miejskim). Jakby zaś nie było, warto jest wskazywać na zadania inne niż typowe. Zadania te zwykle są ciekawsze, a przede wszystkim mają przełożenie na praktykę. Pamiętajmy również o tym, że wykształcenie umiejętności logicznego myślenia jest wartością nadrzędną w procesie nauczania przedmiotów ścisłych (nie tylko matematyki). Umiejętność tę uczeń pozyskuje między innymi dzięki analizie problemów interdyscyplinarnych. Dzieje się tak dlatego, że problemy te są ciekawe i często prowadzą do nieoczekiwanych wniosków.

Tak jak zaczęliśmy, zakończymy również cytatem:
Mówisz mi, że to Twój uczeń i że ... odrzucił Ciebie,
I co z tego? - Jest przecież Twym nauczycielem!
A ja?, - pytasz ...,
Cóż, jesteś jego mistrzem!

Andrzej Góralski[10]

10 Pruski Ł., (1984) O metodzie nauczania rozwiązywania zadań matematycznych [w: Góralski A. (red.), Zadanie, metoda, rozwiązanie, Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.

Bibliografia

Droga do sukcesu – skuteczne strategie przygotowania uczniów do egzaminu z matematyki 1

1. Pólya, G. (2012), *Jak to rozwiązać?*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
2. Centralna Komisja Egzaminacyjna – Egzamin ósmoklasisty, https://cke.gov.pl/egzamin-osmoklasisty/ [dostęp: 15.01.2025]
3. Centralna Komisja Egzaminacyjna, *Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2024/2025*, http://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_OSMOKLASISTY/Informatory/2024/standard/Informator_E8_matematyka_2025_P1.pdf [dostęp: 15.01.2025]
4. Centralna Komisja Egzaminacyjna, *Jak radzić sobie ze stresem egzaminacyjnym? Zalecenia dla ósmoklasistów*, https://oke.jaworzno.pl/www3/wp-content/uploads/eo/materialy/2022/20220425_E8_Jak_radzic_sobie_ze_stresem_egzaminacyjnym.pdf [dostęp: 15.01.2025]
5. UNICEF Polska, Ćwiczenie relaksacyjne i oddechowe *dla dzieci i młodzieży*, https://unicef.pl/content/download/46157/file/%C4%86wiczenie%20relaksacyjne%20i%20oddechowe.pdf [dostęp: 15.01.2025]

Różnorodne formy pracy podczas zajęć szansą na rozwój osobisty ucznia 2

1. Okoń, W. (2003), *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „Żak".
2. https://bingobaker.com
3. https://childdevelop.pl
4. https://eduzabawy.com
5. https://kartygrabowskiego.pl/blog/lamiglowki-z-mnozeniem-i-dzieleniem
6. https://salagier.pl/matematyka
7. https://www.szkolazklasa.org.pl/materialy/
8. https://www.worksheetworks.com/math.html
9. https://www.worksheetworks.com/puzzles.html
10. www.canva.com

Błąd kluczem do nauki i rozwoju 3

1. Dweck, C.S., (2017), *Nowa psychologia sukcesu,* Warszawa: Wydawnictwo MUZA S.A.
2. Dzielińska, M., Piotrowski, K., Lasota M., (2023), *Wypalenie rodzicielskie wśród rodziców dzieci z niepełnosprawnościami i chorobami przewlekłymi*, „Psychologia rozwojowa", t: 28, nr 2023/2, s. 115-133.
3. Piotrowski, K., Dzielińska, M., Sanna, K., Szczygieł, D., (2022), *Wypalenie rodzicielskie: wprowadzenie do teorii i badań*, „Psychologia rozwojowa", t: 27, nr 2022/ 3, s. 9-23.

Strategie rozwiązywania zadań otwartych z matematyki 4

1. Mazur, U., Kołodziej, K. (2019), *Diagnoza umiejętności rozwiązywania zadań z kontekstem praktycznym na egzaminie ósmoklasisty*. https://www.oke.krakow.pl/inf/filedata/files/PTDE_2019_Mazur%2C%20Kolodziej.pdf, (dostęp: 30.01.2025).
2. Swoboda, E. (2018*), Indywidualne strategie rozwiązania jednego zadania*, „Matematyczna Edukacja Dzieci: czasopismo dla nauczycieli i rodziców", nr 2018/3, s. 59-74. https://www.matematykadlawszystkich.pl/mednr3/Swoboda.pdf, (dostęp: 30.01.2025).
3. Informator o egzaminie ósmoklasisty z matematyki od roku szkolnego 2018/2019, https://cke.gov.pl [dostęp: 14.02.2025]

Oswoić matematykę - projekt edukacyjny o charakterze metodycznym 6

1. Jucewicz, M., Karpiński, M., Lech, J. (2022), *Matematyka z plusem. Program nauczania matematyki w szkole podstawowej dla drugiego etapu edukacyjnego (klasy IV-VIII szkoły podstawowej)*, Gdańsk:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.
2. Żurek, A, Jędrzejewicz, P. (2010), *Zbiór zadań dla kółek matematycznych w szkole podstawowej,* Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.
3. Grochowalska, M. (2024), *Przygotowanie do egzaminu ósmoklasisty. Zestawy zadań*, Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.

Matematyka - radość tworzenia i odkrywania. Kilka raczej ciekawych przykładów 8

Pozycje zwarte
1. Góralski A. (red.), (1984), *Zadanie, metoda, rozwiązanie*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
2. Hooke R., Shaffer D., (1969), *Modele matematyczne a rzeczywistość*, Warszawa: PWN.
3. Small B., (1995), *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniem systemów obliczeń symbolicznych*, Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
4. Jędrzejewski J., Kruczek W., Kujawski A., (1988), *Zbiór zadań z fizyki*, t. 1 i 2, Warszawa: Wydawnictwo Naukowo-Techniczne.
5. Spustek H., (2000), *Elementy informatyki*, Warszawa: Wydawnictwo WSISiZ.
6. Spustek H., (2012), *Fizyka – zadania i problemy*. Cz. I. Mechanika, Wrocław: Agencja Wydawnicza „ARGI" s.c.

Artykuły w czasopismach
1. Czuchry E., Zadanie F 575, Delta Nr 7/2002, s. 6.
2. Czuchry E., Elektryczne układy samopodobne, Delta Nr 2/2003, s. 4.
3. Czuchry E., Teoria liczb a opór zastępczy, Delta Nr 7/2006, s. 8-9.
4. Jaszuńska J., Średnie w trapezie, Delta nr 10/2005, s. 10.
5. Matkowski J., O średnich w trapezie, Delta nr 7/2006, s. 6.
6. Wrzesień A., Jeszcze jedna, Delta Nr 4/2006, s. 12.
7. Mąkowski A., Zadania, Delta Nr 5/1975, s. 17.
8. Oleszkiewicz K., Zadania, Nasza rodzima delta, Delta Nr 2/1997 s. 8.

Źródła elektroniczne
1. https://deltami.edu.pl/numery/
2. Spustek H., (2024) Wrocław: DODN, Skrypty Belfra https://dodn.dolnyslask.pl/materialy/skryptybelfra/SkrBNr73a.pdf

Akty prawne
1. Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz podstawy programowej kształcenia ogólnego dla szkoły podstawowej, w tym dla uczniów z niepełnosprawnością intelektualną w stopniu umiarkowanym lub znacznym, kształcenia ogólnego dla branżowej szkoły I stopnia, kształcenia ogólnego dla szkoły specjalnej przysposabiającej do pracy oraz kształcenia ogólnego dla szkoły policealnej.
2. Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia.

