

Zadania na XXII Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lejki
Etap powiatowy – 4 lutego 2023 r. godzina 10.00 (150 minut)

Poziom I

(klasy pierwsze liceum i technikum oraz klasy ósme szkoły podstawowej)

1. Znajdź wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, które spełniają równanie:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{ab} + \frac{3}{abc} = 1$$

2. Wewnątrz kwadratu ABCD, o boku długości 2 dm, obrano punkt M, który znajduje się w równych odległościach od wierzchołka A, wierzchołka B oraz boku CD. Wykonaj odpowiedni rysunek i oblicz pole trójkąta ABM. Jakim procentem pola kwadratu ABCD jest pole trójkąta ABM?
3. Podaj warunek na a , by liczby x, y były względem siebie odwrotne. Sprawdź, bez użycia kalkulatora i obliczania wartości potęg, czy liczby: $x = \frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$ oraz $y = \frac{5 \cdot 4^{15} \cdot 9^9 - 4 \cdot 3^{20} \cdot 8^9}{5 \cdot 2^9 \cdot 6^{19} - 7 \cdot 2^{29} \cdot 27^6}$ są odwrotne względem siebie.
4. Suma dwóch liczb naturalnych wynosi 81. Jeżeli jedną z tych liczb podzielimy przez drugą, to otrzymamy iloraz 15 i resztę n . Znajdź te liczby.
5. Dany jest czworokąt wypukły ABCD, taki że kąty przy przeciwległych wierzchołkach B oraz D są proste. Z punktu B, poprowadzono odcinek BH (H należy do boku AD), który jest prostopadły do AD. Ponadto wiadomo, że $|AB| = |BC| = x$; $|BH| = 1$ oraz $|DH| : |AH| = 2 : 1$. Oblicz pole czworokąta ABCD oraz długości jego boków.

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

1. Zadanie Bezouta.

Kupiec kupił konia i po pewnym czasie sprzedał go za 24 pistole tracąc przy tym tyle procent, ile pistoli kosztował koń. Za ile pistoli kupiec kupił konia?

2. Wykaż, że liczba: $\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{13-4\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}}$ jest liczbą całkowitą.
3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkty D i E dzielą boki AB i AC tego trójkąta w stosunkach $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{1}{2}$. Proste CD i BE przecinają się w punkcie S. Wykaż, że suma kątów ABS i BAS wynosi 90° .
4. Stosunek długości promieni okręgów wpisanego i opisanego na trójkącie prostokątnym wynosi 2:5. Oblicz stosunek długości środkowych poprowadzonych z wierzchołków kątów ostrych tego trójkąta.
5. Iloczyn pewnych trzech liczb pierwszych równa się ich jedenastokrotnej sumie. Jakie to liczby?

Poziom III

(klasy trzecie liceum i technikum po szkole podstawowej)

1. Znajdź wszystkie wartości parametru m , dla którego zachodzi warunek: liczba pierwsza jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego $x^2 - 10x + m^2 = 0$.
2. Wykaż, że dla dowolnego trójkąta prawdziwa jest nierówność: $4P_\Delta < p^2$, gdzie p oznacza połowę obwodu trójkąta.

3. Rozwiąż układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xy + yz + xz = -1 \\ x^3 + 2xy + y^3 = 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

4. W prostokąt wpisano dwa okręgi o równych promieniach styczne zewnętrznie do siebie oraz styczne każdy do trzech boków prostokąta. Przy dłuższych bokach prostokąta wpisano jeszcze dwa mniejsze okręgi o równych promieniach styczne do większych okręgów oraz do dłuższych boków prostokąta. Środki czterech okręgów utworzyły czworokąt. Oblicz stosunek pola powstałego czworokąta do pola prostokąta.
5. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b oraz $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ są wymierne to liczby $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ też są wymierne.