



XX JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY
IM. HUGONA STEINHAUSA
5 kwietnia 2022

„Między duchem a materią pośredniczy
matematyka”

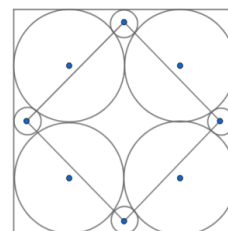


POZIOM PIERWSZY

1. Jurek szedł z miejscowości A do B z prędkością 4,5 km/h. Po upływie jednej godziny i 20 minut od jego wyjścia z A wyjechał samochód, poruszając się w kierunku B z prędkością 45 km/h. Gdy dogonił Jurka, zabrał go, dzięki czemu chłopiec znalazł się w B o 2 godziny 16 minut wcześniej niż, gdyby całą drogę szedł ze stałą prędkością. Oblicz odległość od A do B.
2. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych spełniających równanie $x^8 - y^8 = 6305$.
3. Na miejscu jedności pewnej trzycyfrowej liczby stoi cyfra 2. Jeżeli tę cyfrę przeniesiemy na pierwsze miejsce, to otrzymamy liczbę większą od pierwotnej o jej trzecią część. Jaka była pierwotna liczba?
4. Z przeciwległych wierzchołków prostokąta poprowadzono odcinki prostopadłe do przekątnej. Odcinki te podzieliły przekątną na trzy równe części, każda o długości 2 cm. Oblicz długości boków tego prostokąta.

POZIOM DRUGI

1. Ile jest równa suma cyfr liczby $10^{100} - 100^{10}$?
2. Wykaż, że dla każdego $x \neq 0$, zachodzi nierówność $x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8) \left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right) \geq 10$.
3. Odległość między miejscowościami A i B wynosi 55 km. Z A do B wyjechał kolarz z pewną stałą prędkością. W 30 minut po nim w tym samym kierunku wyjechał samochód i po 10 minutach dogonił kolarza. Samochód nie zatrzymując się pojechał dalej z tą samą prędkością. Dotarł do B i zaraz zawrócił. W drodze powrotnej, po upływie godziny od wyjazdu z A, spotkał powtórnie kolarza. Wyznacz prędkość jazdy kolarza i samochodu.
4. W kwadracie o boku długości 1 umieszczono cztery większe okręgi styczne i cztery mniejsze – tak jak pokazano na rysunku. Oblicz pole kwadratu, który powstał po połączeniu środków mniejszych okręgów.



POZIOM TRZECI

1. Dla jakich wartości parametru a , $a \neq 0$, równanie $|x + 1| = ax^2$ ma dokładnie dwa rozwiązania?
2. Wykaż, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_+ - \{1\}$ równość $\frac{1}{\log_2 n} + \frac{1}{\log_4 n} + \frac{1}{\log_6 n} + \dots + \frac{1}{\log_{2n-2} n} + \frac{1}{\log_{2n} n} = n \log_n 2 + \log_n n!$ jest prawdziwa.
3. W kwadracie o boku 4 poprowadzono cztery okręgi o środkach w wierzchołkach kwadratu i promieniach 4. Oblicz pole obszaru wyróżnionego na rysunku.
4. Wyznaczyć wszystkie przedstawienia liczby 2012 w postaci sumy kolejnych liczb całkowitych.

