



„Między duchem a materią pośredniczy matematyka”

XXI JASIELSKI KONKURS MATEMATYCZNY IM. HUGONA STEINHAUSA

17 lutego 2023 r.

POZIOM TRZECI

1. Uzasadnij, że dla $n \in N$ liczba $6^{2n+2} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ jest podzielna przez 900.
2. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x^2 + y = 2023 \\ x + y^2 = 2023 \end{cases}$$
3. Pewien profesor matematyki napisał na tablicy wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych i powiedział: „Jeżeli w tym wielomianie w miejsce x podstawimy wiek mojego syna, który właśnie ukończył k , $k \in Z_+$ lat, to otrzymamy $W(k) = k$; ponadto $W(0) = p$, gdzie p jest liczbą pierwszą większą od k . Ile lat ma syn profesora.
4. Dane są okręgi o_1 i o_2 o promieniach długości odpowiednio R i r ($R > r$) styczne zewnętrznie w punkcie S . Prosta p jest wspólną styczną tych okręgów nie przechodzącą przez punkt S .
 - a) oblicz długość odcinka którego końcami są punkty styczności prostej p z okręgami o_1 i o_2
 - b) oblicz długość promienia okręgu stycznego do tych okręgów i jednocześnie do odcinka którego końcami są punkty styczności prostej p z okręgami o_1 i o_2 .

Uwaga!

- Każde rozwiązanie zapisz na oddzielnej kartce.
- Do każdego z zadań należy przedstawić wszystkie etapy prowadzące do otrzymania rozwiązania.
- Czas pracy: 150 minut.

ŻYCZYMY POWODZENIA !