



7

Zadania na XXIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lejca

Poziom II

(klasy drugie liceum i technikum)

Etap powiatowy

17 lutego 2024 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Zadanie Leonarda Fibonacciego.

Dwie wieże, jedna o wysokości 40 stóp, a druga o wysokości 30 stóp, oddalone są od siebie o 50 stóp. Pomiędzy nimi znajduje się wodotrysk. Na szczycie każdej z wież siedzi ptak. Ptaki jednocześnie sfrunęły najkrótszą drogą, z jednakową prędkością do wodotrysku i dotarły do niego jednocześnie. Oblicz odległość każdej z wież od wodotrysku.

2. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek:
 $2a^2 + 9b^2 + 16c^2 = 6ab + 8ac$, to $a : b : c = 12 : 4 : 3$.

3. Wykaż, że liczba: $\frac{\sqrt{2a^2 - 4\sqrt{2}ab + 4b^2} + \sqrt{8a^2 - 4\sqrt{2}ab + b^2}}{\sqrt{2}a - b}$ jest liczbą całkowitą dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b spełniających warunek: $a > b\sqrt{2}$.

4. Na boku AB trójkąta równobocznego ABC zbudowano prostokąt $ABDE$ w którym $|AB| = 2|AE|$ tak, że obydwie figury częściowo się pokrywają. Oblicz stosunek pola tej części trójkąta, którą zakrywa prostokąt do pola całego trójkąta.

5. Wykaż, że liczba $(n^3 - n)(n^2 - 4)$ jest podzielna przez 120 dla dowolnej liczby całkowitej n .

Powodzenia!